非自明な背景での非可換ゲージ理論(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

岸本, 功

主論文 1

Noncommutative gauge theories on nontrivial backgrounds

岸本 功[1]

Department of Physics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

January 5, 2001

概 要

本論文では、まず平坦な背景における noncommutative gauge theory の gauge equivalence relation に関する comment を述べ、次に Fedosov の変形量子化の手法を用いることで一般の symplectic 多様体上の noncommutative gauge theory の定義の候補を与える。またこの定義に必要な非可換な $*$ 積の具体的な形の計算例をいくつか explicit な形で示す。

B 場のある背景において弦理論を考えることで弦理論が非可換幾何学と結びついていることが最近明らかにされ、B 場が nonzero の背景で D-brane 上に誘起されるゲージ理論の非可換な記述、つまり noncommutative gauge theory が注目を浴びるようになってきた。しかしながら、ほとんどの場合 B 場が定数の場合すなわち非可換な $*$ 積が Moyal 積の場合しか考えられていない。そこで本論文は B 場が定数でない場合に相当するような場合も扱えるようにするために、nontrivial な背景での noncommutative gauge theory の構成を試みようとするものである。テクニカルには変形量子化で知られている Fedosov の $*$ 積を用いることになるが、その $*$ 積の構成法を詳細に調べることにより一般の非可換ゲージ場の記述法を議論する。

[1] ikishimo@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

目 次

1 序

1990年代の半ば以降、超弦理論の双対性が盛んに議論され、その中で開弦の端がくっつくことのできるD-braneの研究がとりわけ重要な役割を果たしてきた。そのD-braneの低エネルギー有効理論として従来Born-Infeld作用による記述がなされてきたが、N. SeibergとE. Witten [3]により、定数B場の背景のもとで可換な普通の積で書かれたBorn-Infeld作用と等価な非可換な積（Moyal積）で書かれた非可換Born-Infeld作用による記述があることが示された。その後、非可換な $*$ 積で書かれたnoncommutative gauge theory（以下では非可換ゲージ理論と呼ぶ[2]）あるいはnoncommutative field theory（非可換場の理論）が爆発的に研究された。[3] もともと弦理論は「素」粒子を点ではなく空間1次元分伸びている弦であるとするものなので、素朴な意味でも何か時空が弦の広がりの分だけぼやけて見えると思われる。一方、非可換な積を導入すると座標そのものが非可換な量になるので、時空の点を普通の意味ではっきりと指定できない、つまりぼやけて見える。このように考えると弦理論と非可換幾何学というのは何かしら対応があると期待されるが、この対応が露わな形で今注目を浴びているのである。[4]

最近では動機となった弦理論とは無関係な物理の模型としても非可換場の理論、非可換ゲージ場の理論の研究が精力的になされるようになってきた。実際、その中では可換な通常の場の理論では存在しないソリトン解が発見されるなど、それ自身にも興味深い物理現象が潜んでおり、非可換時空の中の豊かな構造が垣間見えつつあるといった状況であろう。[5]これらの多くの研究の中でしばしば用いられている非可換な積は

$$
\begin{aligned}
f(x) * g(x) \;&:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{i}{2}\right)^{k} \theta^{i_1 j_1} \cdots \theta^{i_k j_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} f(x) \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} g(x) \\
&\qquad \left(= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j\right) g(x) \right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

で定義されるMoyal型の積である。つまり、無限階の微分を含むものであるので、この $*$ 積を用いた非可換場の理論は必然的に非局所的な相互作用を含むことになり、非局所場の理論の模型としても興味深いものである。

ところでMoyal積は(1)は変形量子化の立場からすれば平坦な $\mathbb{R}^n$ の上の関数の普通の可換な積を非可換で結合的な積に変形したものである。実際、弦理論との対応がはっきりとわかっているのは弦理論の背景の計量 g_{ij} およびB場 B_{ij} が定数の場合のみであり、これは(1)にでてくる非可換パラメータ θ^{ij} が定数であることに対応している。従来、弦理論の背景としては簡単のためB場を零として議論することが多かったのであるが、それは超重力理論の運動方

---

[2]非可換ゲージ理論というと従来は普通の可換な積で書かれているがゲージ群が非可換な行列のLie群のゲージ理論すなわちnon Abelian gauge theoryを指すことが多かったがSeiberg-Witten [3]が浸透した後ではnoncommutative gauge theoryの意味で用いることも多い。本論文で非可換ゲージ理論というと専らnoncommutative gauge theoryを指すことにする。

[3]実際、現在例えば[3]のcitationの数は450を超える勢いである。しかしそれ以前に弦理論の行列模型と非可換幾何学の関連を示した[4],[5]から素粒子論における非可換ブームは始まっていた。

[4]弦の場の理論と非可換幾何学の対応についてはすでに1980年代にE. Wittenにより[6]で研究されていたのであるが。

[5]例えば[12]とそのreferencesなど。

程式や超対称性を保つ条件を満たすために自明に $H=dB=0$ となるためでもあった。これらの式は $H=dB$ の形で入っているので $B=0$ だけでなく一般に $dB=0$ の場合も同等に考慮すべきものだと思われる。そしてとくに $B_{ij}\neq 0$ で定数の場合が多く研究されるようになってきたのである。するとこの拡張として $dB=0$ で $B_{ij}\neq 0$ が定数ではない場合を考えるのは極めて自然なことであるが、このような背景での弦理論を扱うのは B_{ij} が定数のときに比べて難しくなってくる。Seiberg-Witten[3] 等で定数の B_{ij} を露わに扱う代わりに、非可換な Moyal 積を用いれば良いことがわかってきたので、B_{ij} が定数でない場合に対応するものとしては変形量子化の立場で Moyal 積を一般化した非可換で結合的な $*$ 積を用いればよいと期待される。本論文ではこの期待に基づいて、その準備の段階として一般の symplectic 多様体上の変形量子化による $*$ 積を用いた非可換ゲージ場の理論の構成を試みるものである。symplectic 多様体を考えるのは、素朴には 2-form B 場が closed である条件 $dB=0$ が非退化な 2-form ω が symplectic form である条件 $d\omega=0$ に対応していると思われるからである。[6]変形量子化の手法はいろいろ知られているがここではこの目的に合った Fedosov の手法 [8][9] を用いる。

非可換幾何学は数学として A. Connes により提唱されているもの [7] が代表的であり、それは普通の可換な積を用いて表される普通の幾何学を一般に非可換な積の場合に拡張するものである。上で述べた物理として非可換場の理論を考える場合は「非可換多様体」上の場の理論を議論していると思うのが自然であると思われる。積が非可換になると多様体の座標も非可換になり、「非可換多様体」はその上の「点」がなにかぼやけた良くわからないものという印象を持つが、形式的には代数と結びつけることで特徴づけることができる。まず普通の可換な場合に知られている典型的な例として Hilbert の零点定理:『$\mathbb{C}^n$ の点全体の集合と多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ の極大イデアルとは 1 対 1 に対応する。対応は $\mathbb{C}^n$ の点 $P=(a_1,\cdots,a_n)$ に $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ の極大イデアル $\mathfrak{M}_P=(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)$ で与えられる。』[10] というものがあることに注意しよう。すなわち、点を代数の言葉で言いかえることができるのである。これと同様の定理が滑らかな関数環(つまり C^∞)の場合にも知られている。[7] 積が非可換な場合は、この対応を逆に読みとって先に非可換な代数を与えることで「点」など非可換多様体を特徴づけるものを定めるのである。つまりもともと素朴には『普通の多様体 $\rightarrow$ その上の可換な関数環』だったのを『非可換な代数 $\rightarrow$ 非可換多様体』という逆の順序で定義するのである。[8]したがって非可換場の理論などの物理に応用する上で、何か関数(場)とその間の非可換な積 $*$ を与えればよいことになるが、この非可換な $*$ 積を与える処方箋として変形量子化を用いることにする。すなわち、本論文の立場は「関数」としては symplectic 多様体 M の上の関数をパラメータ h で変形したもの(つまり $C^\infty(M)[[h]]$)をとり、それらの間の積としては変形量子化による Fedosov の $*$ 積を用いる。[9]

[6]実際に本論文による一般の場合の非可換ゲージ場の理論の記述が、B 場が定数でないような非自明な背景での弦理論の記述に対応するものであるかどうか比較することはこれからの課題である。

[7]Gelfand-Neimark の定理と呼ぶものらしい。この対応についてはこれ以上触れないことにする。

[8]可換な場合でも代数幾何のスキームでは先に可換環を与えるので後者の場合にあたる。非可換多様体の定義はむしろスキームの非可換環への一般化というほうが良いのかもしれない。ただし、数学として非可換多様体は可換な普通の多様体の場合ほどはまだまだわかっていないようである。

[9]本論文の非可換ゲージ理論の構成法は、非可換幾何学の一般論 [7] に基づいて抽象的に定義していくのではなく、平坦な背景に適用すれば [3] 以降物理でよく議論される非可換ゲージ理論に帰着するように(素朴に)一般化したもので、数学的な観点からの位置付けは本論文では議論しない

そもそも変形量子化は、「古典力学 → 量子力学」において phase space の Poisson 括弧を（一般に非可換な）演算子の交換関係に起きかえる、という操作を phase space 上の関数はそのままでそれらの積を非可換にすることで対応させるというものだった。従ってもともとはこの非可換性は量子力学において座標とその共役運動量が非可換であることに対応するものだった。しかしこれを非可換幾何学に用いるときは一旦 phase space は忘れて、（運動量ではなく）座標そのものの間に非可換な関係があり、それが変形量子化の $*$ 積で与えられるという立場に立っていることに注意しておこう。

本論文の構成は次のようになっている：
§2 では弦理論がどのようにして非可換幾何学と結びついているかを Seiberg-Witten[3] に沿って本論文に関連する部分を紹介する。§3 では [3] で提案された可換なゲージ場と非可換なゲージ場の間の変換（いわゆる Seiberg-Witten map）を再考しそれに不定性があることを示し、[3] の主張について議論する。[10]
§4 では変形量子化の定義などを簡単に紹介する。§5 では Fedosov の $*$ 積の構成法 [8][9] とその性質を詳細に述べ、後の notation および convention を固定する。§6 は Fedosov の $*$ 積を用いて、あるいは Fedosov の構成法に付随した形で、一般の非自明な背景での非可換ゲージ理論の構成法を提案する。[11]
§7 では、最も簡単でしかも露わに計算を遂行できる例として通常よく調べられている定数背景場の場合に §6 の構成法を適用してみる。§8 では 2 次元の定数でない非自明な背景で露わに Fedosov $*$ 積を計算できる例をつくり、それについて議論する。§9 では symplectic 多様体として Kähler 多様体と場合の Fedosov 流の $*$ 積について触れておく。
§10 では本論文のまとめと今後の展望を述べる。
また Appendix A では symplectic 多様体に関する事項をまとめた。Appendix B では $*$ 積のいろいろな性質について本編の補足を述べた。

[10] これは [1] に基づく。
[11] これは主に [2] に基づく。

2 弦理論に現れる非可換性

ここでは弦理論にどのように非可換性が現れるのか簡単に述べ、§3 で議論する [3] の主張を紹介する。

2.1 作用と境界条件

弦理論では、簡単のため時空が平坦： $g_{ij}=\eta_{ij}$ とし、他の超重力理論に現れる場は零とした背景のもとで考えることが多いが、少し一般化して計量 g_{ij} が定数で、NSNS2-form 場（B 場）B_{ij} が定数の背景時空で弦理論を考えよう。（実際、このような背景も超重力理論の自明な古典解である。）ここではとくにボゾニックな開弦に注目し、作用：

$$S=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma}d^2\sigma(\eta^{\alpha\beta}g_{ij}\partial_\alpha X^i\partial_\beta X^j-\epsilon^{\alpha\beta}b_{ij}\partial_\alpha X^i\partial_\beta X^j) \tag{2}$$

を考えよう。[12] まず弦の長さを π とし、次のように作用を書きかえる：[13]

$$S=\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma(\frac{1}{2}g_{ij}\dot{X}^i\dot{X}^j-\frac{1}{2}g_{ij}X'^iX'^j+b_{ij}\dot{X}^iX'^j) \tag{3}$$

この変分をとると

$$\delta S=-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma g_{ij}(\ddot{X}^i-X''^i)\delta X^j-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int dt\left[(g_{ij}X'^i-b_{ij}\dot{X}^i)\delta X^j\right]_0^\pi \tag{4}$$

なので、弦の端で任意の変分 δX^i をとると境界条件は

$$g_{ij}X'^j+b_{ij}\dot{X}^j=0 \quad (\text{at } \sigma=0,\pi) \tag{5}$$

となり、また運動方程式は

$$\ddot{X}^i-X''^i=0 \quad (0\leq\sigma\leq\pi) \tag{6}$$

である。(5) という拘束条件があることに注意しながら正準量子化の手続きを慎重に行うと開弦の端で X^i 同士が非可換になることがわかる。[14]

2.2 開弦の端の非可換性

ここでは共形場の理論に基づき (2) のグリーン関数から弦の端に生じる非可換性を導こう。作用 (2) の世界面を Euclid にしたものは

$$S_{\mathrm{E}}=\frac{1}{\pi\alpha'}\int_{\Sigma}d^2z\left(g_{ij}\partial X^i\bar{\partial}X^j+b_{ij}\partial X^i\bar{\partial}X^j\right) \tag{7}$$

---

[12] ここで Σ は開弦の世界面であり Σ 上の計量は $\eta^{\alpha\beta}:=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ に固定した。（ここの議論では b,c ゴーストは本質的でないので無視することにする。）また $\epsilon^{\alpha\beta}:=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

[13] $t:=\sigma^1, \sigma:=\sigma^2, \dot{}=\frac{d}{dt}, {}'=\frac{d}{d\sigma}$ とした。

[14] 具体的には例えば [11] の Appendix A を参照。

で与えられる。ただし $z=e^{i(t+\sigma)}, \bar{z}=e^{i(t-\sigma)}, \partial=\frac{\partial}{\partial z}, \bar{\partial}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, d^2z=\frac{i}{2}dz\wedge d\bar{z}$ とし弦の世界面は z 平面の上半面とする。従って開弦の端は z 平面の実軸になる。境界条件 (5) は

$$g_{ij}(\partial-\bar{\partial})X^j+b_{ij}(\partial+\bar{\partial})X^j=0 \quad (\text{at } z=\bar{z}) \tag{8}$$

運動方程式 (6) は

$$\partial\bar{\partial}X^i=0 \quad (\mathrm{Im}z\geq 0) \tag{9}$$

となる。したがってグリーン関数 $\Delta^{ij}(z,\bar{z},z',\bar{z}')$ を

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi\alpha'}\partial\bar{\partial}\Delta^{ij}=-\delta^2(z-z')g^{ij}, \quad (\mathrm{Im}z\geq 0, \mathrm{Im}z'\geq 0)\\&g_{ij}(\partial-\bar{\partial})\Delta^{jk}+b_{ij}(\partial+\bar{\partial})\Delta^{jk}=0, \quad (\text{at } z=\bar{z})\\&\Delta^{ij}(z,\bar{z},z',\bar{z}')=\Delta^{ji}(z',\bar{z}',z,\bar{z})\end{aligned} \tag{10}$$

の解として定義すると2次元のラプラス方程式の基本解から境界条件を満たすように重ね合わせて

$$\Delta^{ij}=-\alpha'\left(g^{ij}(\log|z-z'|-\log|z-\bar{z}'|)+G^{ij}\log|z-\bar{z}'|^2+\frac{1}{2\pi\alpha'}\theta^{ij}\log\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'}+D^{ij}\right) \tag{11}$$

が得られる。($D^{ij}=D^{ji}$ は任意定数。) ここで対称行列 G^{ij} と反対称行列 θ^{ij} は

$$G^{ij}+\frac{\theta^{ij}}{2\pi\alpha'}=\left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}\right)^{ij} \tag{12}$$

つまり

$$G^{ij}=\left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}g\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij}, \qquad \theta^{ij}=-(2\pi\alpha')^2\left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}B\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij} \tag{13}$$

と定義した。G^{ij} の逆行列である G_{ij} は open string metric (それに対してもと作用の中の g_{ij} は closed string metric) と呼ばれる。この Δ^{ij} を propagator $\langle X^i(z,\bar{z})X^j(z',\bar{z}')\rangle$ と同一視する。特に弦の端では $z=\bar{z}=:\tau, z'=\bar{z}'=:\tau'$ として

$$\langle X^i(\tau)X^j(\tau')\rangle=-\alpha' G^{ij}\log(\tau-\tau')^2+\frac{i}{2}\theta^{ij}\epsilon(\tau-\tau') \tag{14}$$

となる。[15] 弦の端でこの τ を時間とみなして同時刻交換関係は

$$[X^i(\tau),X^j(\tau)]=X^i(\tau)X^j(\tau-0)-X^j(\tau+0)X^i(\tau)=i\theta^{ij} \tag{16}$$

15

$$\begin{aligned}&\epsilon(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases},\\&\log(x\mp i0)=\log|x|\pm\frac{1}{2}i\pi\epsilon(x)\end{aligned} \tag{15}$$

で $D^{ij}=0$ とした。

となる。[16] つまり $\theta^{ij} \neq 0$ あるいは $b_{ij} \neq 0$ なら弦の端の座標が非可換になっていると解釈できる。

2.3 可換な記述と非可換な記述

開弦の端がくっつく $p+1$ 次元膜である Dp brane の低エネルギー有効理論として Born-Infeld 型の作用：

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{BI}} &= \int d^{p+1}x \mathcal{L}_{\mathrm{BI}}, \\
\mathcal{L}_{\mathrm{BI}} &= \frac{1}{g_s(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}\sqrt{-\det(g+2\pi\alpha'(B+F))}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

による記述が従来なされてきた。(以下では world volume の座標と背景時空の座標を同一視する static ゲージをとり、D brane に垂直な方向の揺らぎ (Higgs 場) は無視し、D brane に沿ったゲージ場の自由度に注目する。) これに対し背景に定数 B 場がある状況で前節までに見てきた非可換性はどのように現れるのだろうか? Seiberg と Witten は [3] において、開弦の端で propagator が (14) のように表されることから OPE でつぶすときの metric として open string metric G_{ij} を用い、さらに余分な θ^{ij} の効果は積を Moyal 型の $*$ 積（つまり $f*g = f\exp\left(\frac{i}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}\theta^{ij}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^j}\right)g$ で置きかえればよいという議論をした。とくにこの結果 Dp brane の低エネルギー有効作用は「非可換」Born-Infeld 型のもの：

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_{\mathrm{BI}} &= \int d^{p+1}x \hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{BI}}, \\
\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{BI}} &= \frac{1}{G_s(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}\sqrt{-\det(G+2\pi\alpha'\hat{F})}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

で記述されるという主張をした。ここで G_{ij}, θ^{ij} は (13) で与えられるものであり open string coupling G_s は closed string metric g_s と

$$
G_s = g_s\left(\frac{\det(G)}{\det(g+2\pi iB)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{19}
$$

の関係にあるものとする。また $\hat{F}$ は非可換ゲージ場 $\hat{A}_i$ の field strength:

$$
\hat{F}_{ij} = \partial_i\hat{A}_j - \partial_j\hat{A}_i - i(\hat{A}_i * \hat{A}_j - \hat{A}_j * \hat{A}_i) \tag{20}
$$

である。D brane が 1 枚の場合では通常の可換な記述ではゲージ群が $U(1)$ なので第 3 項は零になるのだが、非可換ゲージ場の場合は Yang-Mills の field strength と同様の形で第 3 項は非零である。

[16] ここで左にある量の時間を未来にとるという point splitting reguralization をした。

実際(18)の非可換な記述が通常の可換なBorn-Infeld作用(17)による記述と矛盾しないことが、次の§3で詳しく述べるgauge equivalence relationを満たす変換[17]により可換なゲージ場 A_i から非可換なゲージ場 $\hat{A}_i$ へ変換することで作用を直接書き換えることにより示された。

ただし§3.3でも注意するように、Born-Infeld作用が意味をもつのはゲージ場の変化が小さいときである、つまりup to $\mathcal{O}(\partial F)$ の近似でのみ有効なものである。また背景の g_{ij}, B_{ij} （従って G_{ij}, θ^{ij} も）は定数としている。従って(18)の行列式detの定義では(20)の $\hat{F}_{ij}$ 同士の積は普通の積としてよい。[18]

まとめるとDp braneは従来の可換な記述はclosed string metric g_{ij}, NSNS2-form B_{ij}, closed string coupling g_s, 可換なゲージ場 A_i で書かれたBorn-Infeld作用(17)になり、非可換な記述はopen string metric G_{ij}, 非可換パラメータ θ^{ij}, open string coupling G_s 非可換ゲージ場 $\hat{A}_i$ で書かれた非可換Born-Infeld作用(18)になり、それらは互いに等価である。

定数 B 場のある背景でのD brane上のゲージ場の記述として非可換な(18)の方を採ることにすると、さらに場が小さいとして展開して2次までとり、D braneが N 枚重なっているとして（B 場がないときと同様に）$\hat{A}_i$ を $N \times N$ のエルミート行列にとると

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\mathrm{NCYM}} &= \int d^{p+1}x\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4g^2_{\mathrm{NCYM}}}G^{ij}G^{kl}\hat{F}_{ik} * \hat{F}_{jl}\right),\\ g^2_{\mathrm{NCYM}} &= G_s(2\pi)^{p-2}(\alpha')^{\frac{p-3}{2}}\end{aligned} \tag{21}$$

が得られる。特に場の間の積は露わに $*$ 積で書いておいた。[19] 対応する非可換ゲージ場 $\hat{A}_i$ の非可換ゲージ変換（の無限小型）は

$$\begin{aligned}\delta\hat{A}_i &= \partial_i\lambda - i(\hat{A}_i * \lambda - \lambda * \hat{A}_i),\\ \delta\hat{F}_{ij} &= i(\lambda * \hat{F}_{ij} - \hat{F}_{ij} * \lambda)\end{aligned} \tag{23}$$

であり、とくに $N=1$ の場合でもゲージ群は非可換になっている。またこのゲージ変換のもとで非可換Yang-Millsの作用(21)は不変である。

[3]以降では(21)に加えてHiggs場などmatterを入れて場の積を $*$ 積にしたものなどが議論されるようになりこれらは非可換Yang-Mills理論と呼ばれたりする。Moyal積の非可換パラメータ θ^{ij} を零に持っていくと普通の $U(N)$ Yang-Mills理論である。また行列同士の $*$ 積

[17] Seiberg-Witten mapと呼ばれる。

[18] G_{ij} 同士および $\hat{F}_{ij}$ と G_{kl} の積においては G_{kl} が定数であることから $*$ 積と普通の積は等しくなる。

[19] ここで考えている状況である $*$ 積がMoyal積の場合、部分積分可能なら上の積分内では二つの関数の $*$ 積は普通の積に帰着し、特に

$$\int d^{p+1}x\, f(x) * g(x) = \int d^{p+1}x\, g(x) * f(x) \tag{22}$$

が成り立つ。ただし§5.1のような一般の $*$ 積の場合は積分測度をうまく定義しなければ(22)が成り立たない。

の交換子 $[\ ,\ ]_*$ は

$$\begin{aligned}[A,B]_* &:= A*B - B*A \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{-1}{4}\right)^{k}\theta^{i_1j_1}\cdots\theta^{i_{2k}j_{2k}}[\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_{2k}}A,\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_{2k}}B] \\ &\quad+\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{i}{2}\right)^{2k+1}\theta^{i_1j_1}\cdots\theta^{i_{2k+1}j_{2k+1}}\{\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_{2k+1}}A,\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_{2k+1}}B\}\Bigg) \end{aligned} \tag{24}$$

と表されるので普通の積による交換子 $[\ ,\ ]$ だけでなく反交換子 $\{\ ,\ \}$ もでてくるが、行列の $u(N)$ 値性つまりエルミート性は

$$(i[A,B]_*)^\dagger = i[A^\dagger, B^\dagger]_* \tag{25}$$

により $*$ 積の交換子をとっても保たれている。

3 Seiberg-Witten map

前述のように Seiberg と Witten は [3] で B 場の入った普通の Born-Infeld 作用 (17) に出てくる普通の可換代数上のゲージ場 A_i と B 場が露わにはない「非可換」Born-Infeld 作用 (18) に出てくる非可換代数上のゲージ場 $\hat{A}_i$ が互いに gauge equivalence relation(26) で結ばれていると主張し、それを定める微分方程式を与えた。ここでは gauge equivalence relation について再考し、[3] で与えられた変換 (Seiberg-Witten map) には大きな不定性があることを議論する。

3.1 Gauge Equivalence Relation

θ^{ij} でパラメトライズされた Moyal 積 $* = \exp(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_i\theta^{ij}\overrightarrow{\partial}_j)$ をもつ非可換で結合的な代数 $\mathcal{A}_\theta = (\mathfrak{u}(N)\otimes C^\infty, *)$ の上にゲージ場 $\hat{A}_i$ があるという状況を考えよう。[20] また、この θ パラメータの空間を ϑ と書き、そこに代数 $\{\mathcal{A}_\theta\}_{\theta\in\vartheta}$ があるとみなす。

二つの代数 $\mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_{\tilde{\theta}}$ の上にあるゲージ場とゲージパラメータ $\hat{A}_i, \hat{\lambda}\in\mathcal{A}_\theta$ と $\tilde{A}_i(\hat{A}), \tilde{\lambda}(\hat{A},\hat{\lambda})\in\mathcal{A}_{\tilde{\theta}}$ の間に次の意味の gauge equivalence relation があると仮定する：

$$\tilde{A}_i(\hat{A}) + \tilde{\delta}_{\tilde{\lambda}}\tilde{A}_i(\hat{A}) = \tilde{A}_i(\hat{A}+\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{A}). \tag{26}$$

ここで $\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}$ は無限小の $\hat{\lambda}$ をゲージパラメータとするゲージ変換：$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{A}_i = \hat{D}_i\hat{\lambda} = \partial_i\hat{\lambda} - i[\hat{A}_i,\hat{\lambda}]$ である。[21] この関係は次の図が可換であることを意味する。

[20] もちろん $N\geq 2$ のときは $*$ 積には行列の積も含まれていると解釈する。

[21] $[\hat{A},\hat{B}] := \hat{A}*\hat{B} - \hat{B}*\hat{A}$, $\{\hat{A},\hat{B}\} := \hat{A}*\hat{B} + \hat{B}*\hat{A}$ としている。

$$\begin{tikzcd}
\hat{A}'_i \arrow[r] & \tilde{A}'_i \\
\hat{A}_i \arrow[u, "\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{A}_i \arrow[u, "\tilde{\delta}_{\tilde{\lambda}}"']
\end{tikzcd}$$

(26) を θ-空間 ϑ における $\hat{A}_i \in \mathcal{A}_\theta$ の関係式とみなしてその解を求めよう。$\tilde{A} = \hat{A} + \delta\hat{A}(\hat{A}) + \mathcal{O}(\delta\theta^2), \tilde{\lambda} = \hat{\lambda} + \delta\hat{\lambda}(\hat{A}, \hat{\lambda}) + \mathcal{O}(\delta\theta^2)$ として (26) を展開して $\mathcal{O}(\delta\theta)$ までとると[22]

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\delta\hat{A}_i - \hat{D}_i\delta\hat{\lambda} + i[\delta\hat{A}_i, \hat{\lambda}] = \frac{1}{2}\delta\theta^{kl}\{\partial_k\hat{A}_i, \partial_l\hat{\lambda}\},$$

この解は一般に[23]

$$\begin{aligned}
\delta\hat{A}_i &= -\frac{1}{4}\delta\theta^{kl}\{\hat{A}_k, \partial_l\hat{A}_i + \hat{F}_{li}\} + \alpha\delta\theta^{kl}\hat{D}_i\hat{F}_{kl} + \beta\delta\theta^{kl}\hat{D}_i[\hat{A}_k, \hat{A}_l], \\
\delta\hat{\lambda} &= \frac{1}{4}\delta\theta^{kl}\{\partial_k\hat{\lambda}, \hat{A}_l\} + 2\beta\delta\theta^{kl}[\partial_k\hat{\lambda}, \hat{A}_l], \\
\delta\hat{F}_{ij} &= \frac{1}{4}\delta\theta^{kl}\left(2\{\hat{F}_{ik}, \hat{F}_{jl}\} - \{\hat{A}_k, \hat{D}_l\hat{F}_{ij} + \partial_l\hat{F}_{ij}\}\right) \\
&\quad -i\alpha\delta\theta^{kl}[\hat{F}_{ij}, \hat{F}_{kl}] - i\beta\delta\theta^{kl}[\hat{F}_{ij}, [\hat{A}_k, \hat{A}_l]],
\end{aligned} \tag{27}$$

となる。ここで $\hat{F}_{ij} := \partial_i\hat{A}_j - \partial_j\hat{A}_i - i[\hat{A}_i, \hat{A}_j]$ は field strength であり、α, β は任意定数である。[24]とくに α, β という任意パラメータが入るということは gauge equivalence relation (26) の要請のみではこの無限小変換が一意的には決まらないということを意味している。ただし、第 1 式をみるとゲージ場 $\hat{A}_i$ を含む $\alpha\delta\theta^{kl}\hat{F}_{kl} + \beta\delta\theta^{kl}[\hat{A}_k, \hat{A}_l]$ をパラメータとするゲージ変換の項のかたちをしているので、その意味では自明な項といえるかもしれない。

しかし、この δ による変換 (27) を 2 回行うと、α, β に依存しない不定性が生じることをみよう。θ を $\delta\theta_2^{ij}$ だけずらす変換 δ_2 をしてから θ を $\delta\theta_1^{ij}$ だけずらす変換 δ_1 をするのと、逆に δ_1 変換してから δ_2 変換したものの差：

$$[\delta_1, \delta_2]\hat{A}_i, \tag{28}$$

は $\hat{A}_i$ の変換の θ-空間 ϑ における 'path dependence' を表しており (27) を使うと次のように

[22] $\exp(\frac{i}{2}(\theta + \delta\theta)^{ij}\overleftarrow{\partial}_i\overrightarrow{\partial}_j) = \frac{i}{2}\delta\theta^{pq}\overleftarrow{\partial}_p\exp(\frac{i}{2}\theta^{ij}\overleftarrow{\partial}_i\overrightarrow{\partial}_j)\overrightarrow{\partial}_q + \mathcal{O}(\delta\theta^2)$ により、$\delta\theta$ が無限小のとき

$$\delta\{f, g\} = \{\delta f, g\} + \{f, \delta g\} + \frac{i}{2}\delta\theta^{pq}[\partial_p f, \partial_q g], \ \delta\hat{D}_i f = \hat{D}_i\delta f - i[\delta\hat{A}_i, f] + \frac{1}{2}\delta\theta^{pq}\{\partial_p\hat{A}_i, \partial_q f\}.$$

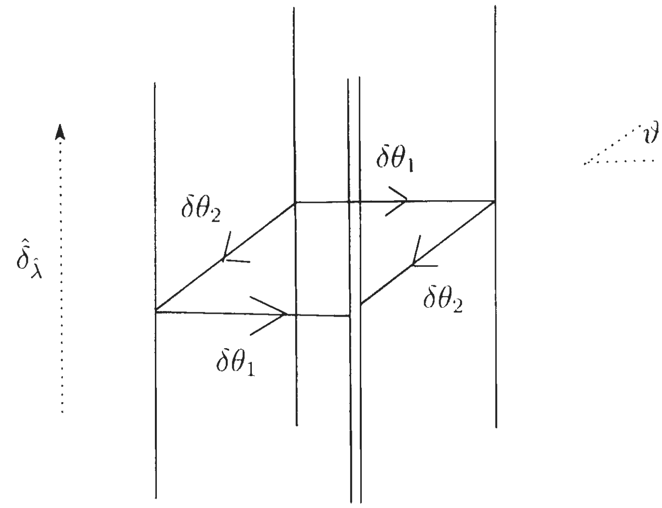
が成り立つことに注意する。

[23] $\delta\hat{A}_i$ は $\hat{A}_i, \delta\theta^{ij}, \partial_i$ で足を適当につぶしたもので書け、$\delta\hat{\lambda}$ は $\hat{\lambda}$ の 1 次であとは $\hat{A}_i, \delta\theta^{ij}, \partial_i$ で足を適当につぶしたものと仮定した範囲で。

[24] ($\alpha = \beta = 0$ としたものが [3](3.8) 式に相当する。

計算される：

$$
\begin{aligned}
& [\delta_1, \delta_2]\hat{A}_i \\
= \ & \delta_1 \left(-\frac{1}{4}\delta\theta_2^{kl}\{\hat{A}_k, \partial_l \hat{A}_i + \hat{F}_{li}\} + \alpha\delta\theta_2^{kl}\hat{D}_i\hat{F}_{kl} + \beta\delta\theta_2^{kl}\hat{D}_i[\hat{A}_k, \hat{A}_l] \right) - (1 \leftrightarrow 2) \\
= \ & \frac{1}{16}\delta\theta_2^{kl}\delta\theta_1^{pq}\Bigg(4i[\hat{F}_{kp}, \partial_l\partial_q\hat{A}_i] + 4[\hat{F}_{kp}, [\hat{A}_l, \partial_q\hat{A}_i] + [\hat{A}_q, \partial_l\hat{A}_i]] \\
& -[\partial_k\hat{A}_p + \hat{F}_{kp}, [\hat{A}_l, \hat{D}_i\hat{A}_q]] + [\partial_p\hat{A}_k + \hat{F}_{pk}, [\hat{A}_q, \hat{D}_i\hat{A}_l]] \\
& +\{\hat{A}_k, \{\hat{F}_{lq}, \hat{D}_i\hat{A}_p\}\} - \{\hat{A}_p, \{\hat{F}_{ql}, \hat{D}_i\hat{A}_k\}\} \\
& -i\{\hat{A}_p, \{\hat{A}_k, [\hat{A}_l, \hat{D}_i\hat{A}_q]\}\} + i\{\hat{A}_k, \{\hat{A}_p, [\hat{A}_q, \hat{D}_i\hat{A}_l]\}\} \\
& +2i[\partial_p\hat{A}_k, \hat{D}_i\partial_q\hat{A}_l] - 2i[\partial_k\hat{A}_p, \hat{D}_i\partial_l\hat{A}_q] \\
& -[[\hat{A}_k, \hat{A}_p], \hat{D}_i\partial_q\hat{A}_l] + [[\hat{A}_p, \hat{A}_k], \hat{D}_i\partial_l\hat{A}_q] \\
& -\{\hat{A}_k, \{\hat{A}_p, \hat{D}_i\partial_q\hat{A}_l\}\} + \{\hat{A}_p, \{\hat{A}_k, \hat{D}_i\partial_l\hat{A}_q\}\}\Bigg) \\
& +\hat{D}_i\Bigg(\delta\theta_2^{kl}\delta\theta_1^{pq}\Big(i\alpha^2[\hat{F}_{kl}, \hat{F}_{pq}] + i\beta^2[[\hat{A}_k, \hat{A}_l], [\hat{A}_p, \hat{A}_q]] \\
& +i\alpha\beta([[\hat{A}_k, \hat{A}_l], \hat{F}_{pq}] - [[\hat{A}_p, \hat{A}_q], \hat{F}_{kl}]) \\
& +\frac{1}{4}\alpha(\{\partial_k\hat{F}_{pq}, \hat{A}_l\} - \{\partial_p\hat{F}_{kl}, \hat{A}_q\}) \\
& +\frac{1}{4}\beta(\{\partial_k[\hat{A}_p, \hat{A}_q], \hat{A}_l\} - \{\partial_p[\hat{A}_k, \hat{A}_l], \hat{A}_q\})\Big) \\
& +\delta\theta_2^{kl}\delta_1(\alpha\hat{F}_{kl} + \beta[\hat{A}_k, \hat{A}_l]) - \delta\theta_1^{pq}\delta_2(\alpha\hat{F}_{pq} + \beta[\hat{A}_p, \hat{A}_q])\Bigg) \\
= \ & \frac{1}{16}\delta\theta_2^{kl}\delta\theta_1^{pq}\Bigg(2i[\hat{F}_{kp}, \hat{D}_l\hat{F}_{qi} + \hat{D}_q\hat{F}_{li}] \\
& +\hat{D}_i\big(\frac{1}{2}\{\hat{A}_k, \{\hat{A}_p, \hat{F}_{lq}\}\} + \frac{1}{2}\{\hat{A}_p, \{\hat{A}_k, \hat{F}_{lq}\}\} \\
& +\frac{1}{2}[[\hat{A}_k, \hat{A}_p], \partial_l\hat{A}_q + \partial_q\hat{A}_l] - i[\partial_p\hat{A}_k, \partial_l\hat{A}_q] + i[\partial_k\hat{A}_p, \partial_q\hat{A}_l]\big)\Bigg) \\
& +\hat{D}_i(\alpha, \beta \text{ dependent terms}). \qquad (29)
\end{aligned}
$$



縦の線は θ-空間 ϑ 上の点のゲージ orbit を示している。
縦の2重線は同じ点上の2つの異なる orbit を表す。

まず予想されるとおり α, β に依存する項は全て（ゲージ場 $\hat{A}_i$ に依存した）ゲージ変換の形に収まっていることに注意する。しかし注目すべきなのは、最後の表式の第1行の α, β に依存せず、かつゲージ変換の形でもない部分があることである。つまりこれは gauge equivalence relation(26) だけで up to ゲージ変換で $\hat{A}_i$ の変換を決めようとしても ambiguity が残ってしまうということを示している。ただし、この θ-空間 ϑ における変換の 'path dependence' の形はゲージ共変な形をしており、少なくとも「局所的」にはゲージ場の再定義により吸収できるものである。[25] ここで「局所的」といったのは $\delta\theta$ が無限小の範囲でかつ、$*$ 積の非局所性を除いて、という意味である。通常の場の理論（つまり可換な代数の上の場の理論）では場の局所的な再定義では物理的なS行列は変わらないということが知られているので、この 'path dependence' は素朴には安全な形、つまり物理を変えない不定性だと思われる。

(27) は $\delta\theta$ が無限小の式なので一般に θ-空間 ϑ で「有限距離」離れた θ の $\hat{A}_i$ のゲージ場の変換はこれを θ-空間 ϑ のある path に沿った積分

$$\tilde{A} = \int_{\mathrm{path}} \delta\hat{A}. \tag{30}$$

で与えられる。したがって変換の 'path dependence' による不定性も (29) を θ に関して積分したものになるので、それを場の再定義で吸収しようとすると一般には非局所的な再定義が必要になると思われる。つまり、この 'path dependence' による変換の不定性が物理を変えてしまうおそれもある。[26]いずれにせよ、θ-空間 ϑ での積分路の選び方は何か他の物理的要請を置かなければ決まらないことに注意しよう。

[25][1] の version 1 では (29) の最後の表式までは変形していなかったが、Y.Okawa 氏と E.Witten 氏によりゲージ場の再定義により吸収できるもののはずだ（であってほしい）、という指摘を受けさらに計算したところ最後の等式が成り立つことがわかった。

[26]このことに関しては M.M.Sheikh-Jabbari 氏から指摘された。

3.2 不定性についてのコメント

ここまで(26)を解いて異なる θ の間の $\hat{A}_i$ の変換を求めるのにまず $\delta\theta$ が無限小の場合の式を導き、それを積分するということを考えた。ここでは別の方法、つまり $\delta\theta$ の（形式的）冪級数として展開して order by order の漸化式で考えよう。

まず $\tilde{A}_i, \tilde{\lambda} \in \mathcal{A}_{\tilde{\theta}}$ を $\delta\theta := \tilde{\theta} - \theta$ で展開する：

$$\tilde{A}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_i^{(n)}, \ \tilde{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}^{(n)}. \tag{31}$$

ここで $\hat{A}_i^{(n)}, \hat{\lambda}^{(n)} \in \mathcal{A}_\theta$ は $\mathcal{O}(\delta\theta^n)$ の量であり、$\hat{A}_i^{(0)} := \hat{A}_i, \hat{\lambda}^{(0)} := \hat{\lambda}$ である。この形式的な展開式(31)を(26)に代入して $\mathcal{O}(\delta\theta^n)$ の項をみると[27]

$$\begin{aligned} &\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_i^{(n)} - \hat{D}_i \hat{\lambda}^{(n)} + i\left[\hat{A}_i^{(n)}, \hat{\lambda}\right] \\ = \ & -i \sum \left(\frac{i}{2}\right)^r \delta\theta^{k_1 l_1} \cdots \delta\theta^{k_r l_r} \left[\partial_{k_1} \cdots \partial_{k_r} \hat{A}_i^{(p)}, \partial_{l_1} \cdots \partial_{l_r} \hat{\lambda}^{(q)}\right\}, \end{aligned} \tag{33}$$

が得られる。（ここで和は $p+q+r=n,\ p,q,r \geq 0,\ p \neq n,\ q \neq n$ の範囲でとり、$[\ ,\ \}$ は r が odd (even) なら反交換子 $\{\ ,\ \}$ (交換子 $[\ ,\ ]$) を表すとする。）これは左辺の $\hat{A}_i^{(n)}, \hat{\lambda}^{(n)}$ が右辺のより低次の $\mathcal{O}(\delta\theta^{n-1})$ 以下の量から決まるという式である。

具体的には次のようにして低い order のものから順に $\hat{A}_i^{(n)}, \hat{\lambda}^{(n)}$ を求める：

1. 右辺に(33)の解 $\hat{A}_i^{(k)}, \hat{\lambda}^{(k)} (k = 1, \ldots, n-1)$ を代入する。
2. $\hat{A}^{(n)}, \hat{\lambda}^{(n)}$ を適当な足をもつ $\delta\theta^n, \hat{A}_i, \partial_j \hat{A}_k, \ldots, \hat{\lambda}, \partial_l \hat{\lambda}, \ldots$ の多項式[28]の一般形[29]で表しておいて(33)の左辺に代入する。
3. $\delta\theta^n, \hat{A}_i, \partial_j \hat{A}_k, \ldots, \hat{\lambda}, \partial_l \hat{\lambda}, \ldots$ の多項式の係数を比較し、未定係数を決定する。

ところがすぐにわかるように

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_i^{0(n)} - \hat{D}_i \hat{\lambda}^{0(n)} + i[\hat{A}_i^{0(n)}, \hat{\lambda}] = 0. \tag{34}$$

---

[27] $\mathcal{A}_{\tilde{\theta}}$ の積を $\mathcal{A}_\theta$ の積で表わすために

$$\exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \tilde{\theta}^{ij} \overrightarrow{\partial}_j\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^m \delta\theta^{k_1 l_1} \cdots \delta\theta^{k_m l_m} \overleftarrow{\partial}_{k_1} \cdots \overleftarrow{\partial}_{k_m} \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j\right) \overrightarrow{\partial}_{l_1} \cdots \overrightarrow{\partial}_{l_m} \tag{32}$$

という関係式を用いて式変形していることに注意しよう。つまりここに書いている（反）交換子は $\mathcal{A}_\theta$ 上の $*$ 積で表わしたものである。

[28] $\mathcal{A}_\theta$ の上の多項式、したがって θ 空間 ϑ の出発点が $\theta \neq 0$ なら各項の積は非可換な $*$ 積であり、積の順序も区別しなければならない。

[29] ここでは $\hat{A}_i, \hat{\lambda}$ から $\tilde{A}_i, \tilde{\lambda}$ への変換式は $\hat{A}_i, \hat{\lambda}, \partial_j \hat{A}_k, \ldots, \delta\theta^{mn}$ とその足を適当につぶしたものでかけると仮定する。これは登場するものは考えている set up で最低限のものしかないという仮定で、その立場では自然なものだろう。しかし弦理論の低エネルギー有効理論としての非可換空間上のゲージ理論を扱う場合、物理的 input により、open string metric G_{ij} やその逆行列も同等に現れると考えるほうが自然かもしれない。もし、G_{ij} で足をつぶすことを許すと候補となる多項式の一般形が非常に複雑になる。従ってこの場合(27)（あるいは(41)）に相当する $\delta\theta$ の1次の部分の不定性でさえ非常に煩雑になる可能性がある

をみたす $\hat{A}_i^{0(n)}, \hat{\lambda}^{0(n)}$ があるとすると (33) の解 $\hat{A}_i^{(n)}, \hat{\lambda}^{(n)}$ にこれを足した $\hat{A}_i^{(n)}+\hat{A}_i^{0(n)}, \hat{\lambda}^{(n)}+\hat{\lambda}^{0(n)}$ も (33) の解になっている。

実際このような不定性の項 $\hat{A}_i^{0(n)}, \hat{\lambda}^{0(n)}$ は以下のように構成できる。

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{A}_i = \partial_i\hat{\lambda} - i[\hat{A}_i, \hat{\lambda}],\ \hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{D}_i\hat{A}_j = \hat{D}_i(\partial_j\hat{\lambda}) - i[\hat{D}_i\hat{A}_j, \hat{\lambda}], \dots, \tag{35}$$

および $\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}$, 交換子 [,] が Leibnitz 則を満たすことに注意すると $\hat{A}_i, \hat{D}_i\hat{A}_j, \dots$ の $\mathcal{A}_\theta$ 上の任意多項式 $\hat{G}$ が次の恒等式を満たす：

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{G}(\hat{A}_j, \hat{D}_k\hat{A}_l, \dots) - \hat{\delta}'_{\hat{\lambda}}\hat{G}(\hat{A}_j, \hat{D}_k\hat{A}_l, \dots) + i[\hat{G}(\hat{A}_j, \hat{D}_k\hat{A}_l, \dots), \hat{\lambda}] = 0, \tag{36}$$

ここで $\hat{\delta}'_{\hat{\lambda}}$ は $\partial_i\hat{\lambda}\cdot\frac{\delta}{\delta\hat{A}_i}$ のように作用するもの、つまり $\hat{A}_i$ を $\partial_i\hat{\lambda}$ で置きかえる、ただし $\hat{D}_i$ の中の $\hat{A}_i$ には作用しないものとする。[30] 同様に

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{F}_{ij} = -i[\hat{F}_{ij}, \hat{\lambda}],\ \hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{D}_k\hat{F}_{ij} = -i[\hat{D}_k\hat{F}_{ij}, \hat{\lambda}], \dots, \tag{37}$$

に注意すると

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{G}^F(\hat{F}_{jk}, \hat{D}_l\hat{F}_{mn}, \dots) + i\left[\hat{G}^F(\hat{F}_{jk}, \hat{D}_l\hat{F}_{mn}, \dots), \hat{\lambda}\right] = 0, \tag{38}$$

ここで $\hat{G}^F(\hat{F}_{jk}, \hat{D}_l\hat{F}_{mn}, \dots)$ は $\mathcal{A}_\theta$ 上の $\hat{F}_{jk}, \hat{D}_l\hat{F}_{mn}, \dots$ の多項式である。

(36)(38) から (34) の一つの解が得られる：

$$\begin{aligned} \hat{A}_i^{0(n)} &= \hat{G}_i^{(n)F}(\hat{F}_{jk}, \hat{D}_l\hat{F}_{mn}, \dots; \delta\theta^n) + \hat{D}_i\hat{G}^{(n)}(\hat{A}_j, \hat{D}_k\hat{A}_l, \dots; \delta\theta^n), \\ \hat{\lambda}^{0(n)} &= \hat{\delta}'_{\hat{\lambda}}\hat{G}^{(n)}(\hat{A}_j, \hat{D}_k\hat{A}_l, \dots; \delta\theta^n), \end{aligned} \tag{39}$$

これにより (31) の $\delta\theta$ の各 order において（少なくとも）任意多項式
$\hat{G}^{(n)}(\hat{A}_j, \hat{D}_k\hat{A}_l, \dots; \delta\theta^n), \hat{G}_i^{(n)F}(\hat{F}_{jk}, \hat{D}_l\hat{F}_{mn}, \dots; \delta\theta^n)$ 分の大きな不定性があるということになり、§3.1 の path dependence による不定性と consistent な結果を与えている。実際 $\hat{G}^{(n)}$ が (29) のゲージパラメータがゲージ場 $\hat{A}_i$ に依存するゲージ変換部分、$\hat{G}_i^{(n)F}$ が (29) のゲージ共変な不定性、に対応している。

特に $\delta\theta$ を無限小とするとこの不定性の形は

$$\begin{aligned} \hat{G}^{(1)}(\hat{A}_j, \hat{D}_k\hat{A}_l, \dots; \delta\theta^1) &= \beta_1\delta\theta^{kl}[\hat{A}_k, \hat{A}_l] + \beta_2\delta\theta^{kl}\hat{D}_k\hat{A}_l, \\ \hat{G}_i^{(1)F}(\hat{F}_{jk}, \hat{D}_l\hat{F}_{mn}, \dots; \delta\theta^1) &= \alpha_1\delta\theta^{kl}\hat{D}_i\hat{F}_{kl}, \end{aligned} \tag{40}$$

となる。（ここで α, β_1, β_2 は任意定数である。）(40) を (39) に代入すると

$$\begin{aligned} \hat{A}_i^{0(1)} &= \delta\theta^{kl}(\alpha_1\hat{D}_i\hat{F}_{kl} + \beta_1\hat{D}_i[\hat{A}_k, \hat{A}_l] + \beta_2\hat{D}_i\hat{D}_k\hat{A}_l) \\ &= (\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_2)\delta\theta^{kl}\hat{D}_i\hat{F}_{kl} + (\beta_1 - \frac{1}{2}i\beta_2)\delta\theta^{kl}\hat{D}_i[\hat{A}_k, \hat{A}_l], \\ \hat{\lambda}^{0(1)} &= \delta\theta^{kl}(2\beta_1[\partial_k\hat{\lambda}, \hat{A}_l] + \beta_2\hat{D}_k\partial_l\hat{\lambda}) = (2\beta_1 - i\beta_2)\delta\theta^{kl}[\partial_k\hat{\lambda}, \hat{A}_l]. \end{aligned} \tag{41}$$

となり、係数を再定義することにより、(27) の α, β 依存項が得られる。

[30] したがって $\hat{D}_i\hat{\delta}'_{\hat{\lambda}} = \hat{\delta}'_{\hat{\lambda}}\hat{D}_i$ が成り立つ。

3.3 $U(1)$ の場合

ここではゲージ群が $U(1)$[31]の場合を考えよう。さらに $\hat{F}_{ij}$ はゆっくりと変化していると仮定し $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ を無視する。この近似は Born-Infeld 作用を考えるときのものである。正確には $\hat{F}\sim\partial\hat{A}$ を $\mathcal{O}(1)$ とみなし、(∂ の数)−($\hat{A}$ の数) で近似の order を数えることにする。$\hat{D}_i=\partial_i+\theta^{jk}\partial_j\hat{A}_i\partial_k+\mathcal{O}(\partial^4\hat{F}\partial)$, $\hat{F}_{ij}=\partial_i\hat{A}_j-\partial_j\hat{A}_i+\theta^{kl}\partial_k\hat{A}_i\partial_l\hat{A}_j+\mathcal{O}(\partial^4\hat{F})$ および (27) の α,β 依存項は $\mathcal{O}(\partial^2\hat{F})$ で無視できることに注意しよう。

この近似において (29) は

$$[\delta_1,\delta_2]\hat{A}_i=\frac{1}{4}\delta\theta_2^{kl}\delta\theta_1^{pq}\hat{D}_i(\hat{A}_k\hat{A}_p\hat{F}_{lq})+\mathcal{O}(\hat{A}\partial^4\hat{F}),\tag{42}$$

となり、また同様に[32]

$$\begin{aligned}
&[\delta_1,\delta_2]\hat{F}_{ij}\\
&=\frac{1}{16}\delta\theta_2^{kl}\delta\theta_1^{pq}\Big(4(i[\hat{D}_p\hat{F}_{ik},\hat{D}_q\hat{F}_{jl}]-i[\hat{D}_k\hat{F}_{ip},\hat{D}_l\hat{F}_{jq}]+[[\hat{F}_{ik},\hat{F}_{jp}]+[\hat{F}_{ip},\hat{F}_{jk}],\hat{F}_{lq}])\\
&+2i[\hat{F}_{kp},\hat{D}_l\hat{D}_q\hat{F}_{ij}+\hat{D}_q\hat{D}_l\hat{F}_{ij}]-i[\hat{F}_{ij},\tfrac{1}{2}\{\hat{A}_k,\{\hat{A}_p,\hat{F}_{lq}\}\}+\tfrac{1}{2}\{\hat{A}_p,\{\hat{A}_k,\hat{F}_{lq}\}\}\\
&+\tfrac{1}{2}[[\hat{A}_k,\hat{A}_p],\partial_l\hat{A}_q+\partial_q\hat{A}_l]-i[\partial_p\hat{A}_k,\partial_l\hat{A}_q]+i[\partial_k\hat{A}_p,\partial_q\hat{A}_l]]\Big)+(\alpha,\beta\text{ dependent terms})\\
&=-\frac{1}{4}i\delta\theta_2^{kl}\delta\theta_1^{pq}[\hat{F}_{ij},\hat{A}_k\hat{A}_p\hat{F}_{lq}]+\mathcal{O}(\partial^4\hat{F}).
\end{aligned}\tag{43}$$

となる。(42)(43) の右辺は leading が $\frac{1}{4}\delta\theta_2^{kl}\delta\theta_1^{pq}\hat{A}_k\hat{A}_p\hat{F}_{lq}$ をゲージパラメータとするゲージ変換の形[33] をしていて、残りは $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ の項は含まずさらに高次の項になっている。すなわち $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ を無視する近似では $\hat{A}_i,\hat{F}_{ij}$ は up to ゲージ変換で gauge equivalence relation (26) から一意的に決まることになる。

§2.3 で述べたように Seiberg-Witten は普通の定数 B 場の入った可換な代数上の Born-Infeld 作用 (17) が B 場の効果を $*$ 積に押しこめた非可換な代数上の Born-Infeld 作用 (18) に up to $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ で等しいことを示した。

実際の彼らの証明では一旦可換な記述 (17) と非可換な記述 (18) を結ぶより一般の（非可換なゲージ場を含む）Lagrangian

$$\hat{\mathcal{L}}_{\rm BI}=\frac{1}{G_s(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}\sqrt{\det(G+2\pi\alpha'(\hat{F}+\Phi))}\tag{44}$$

を考える。ここで反対称行列 Φ、open string metric（対称行列） G、open string coupling G_s は与えられた closed string metric g、closed string coupling g_s、NSNS2-form B および非可換

---

[31] つまり、非可換ゲージ場 $\hat{A}_i$ が 1×1 行列ということ。
[32] (43) の始めの等式は $U(N)$ の場合にも成り立つ。二つ目の等式は $U(1)$ の場合のみ正しい。
[33] $\theta^{ij}\neq0$ なら代数の非可換性のため $U(1)$ の場合でも $\hat{F}_{ij}$ はゲージ不変ではなくゲージ共変である。

パラメータ θ に対し

$$\begin{aligned}\frac{1}{G+2\pi\alpha'\Phi} &= -\frac{\theta}{2\pi\alpha'}+\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}, \\ G_s &= g_s\left(\frac{\det(G+2\pi\alpha'\Phi)}{\det(g+2\pi\alpha' B)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{g_s}{\left(\det\left((\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}-\frac{\theta}{2\pi\alpha'})(g+2\pi\alpha' B)\right)\right)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned} \tag{45}$$

により決まるもので (44) の中の $\hat{F}$ は（$\theta\neq 0$ なら）非可換な代数 $\mathcal{A}_\theta$ 上の非可換ゲージ場 $\hat{A}$ の field strength である。この対応でみると特に $\Phi = B$ となる $\theta = 0$ の場合が可換な記述 (17) を再現し、 $\Phi = 0$ なる θ の値の場合が (18) の非可換な記述を再現する。（一般の θ の場合は (44) による非可換な記述である。）[3] では $\delta\theta^{ij}$ の変分のもとで**非可換代数 $\mathcal{A}_\theta$ 上の非可換ゲージ場 $\hat{A}$ を (27)（で $\alpha=\beta=0$ にとったもの）のように変化させれば** (44) の $\hat{\mathcal{L}}_{\rm BI}$ が up to 全微分、up to $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ で不変であることが示されている。つまり

$$\delta\hat{\mathcal{L}}_{\rm BI} = (\text{全微分}) + \mathcal{O}(\partial\hat{F}) \tag{46}$$

なので特に

$$\hat{S}_{\rm BI} - S_{\rm BI} = \int d^{p+1}x \int \delta\hat{\mathcal{L}}_{\rm BI} = \mathcal{O}(\partial\hat{F}) \tag{47}$$

となり二つの記述は作用のレベルで（この近似で）等価になる。同じ意味で (44) は g, B を固定したとき異なる θ でも互いに up to $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ で作用は等しい。

ところで (27) は gauge equivalence relation をみたす無限小変換の一般形であり α,β が零である必要はないが、α 依存項は $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ であり、さらに $U(1)$ の場合 β 依存項も $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ となっており Born-Infeld 作用を議論する近似ではこの不定性は無視できる。

ところで (27) の α,β に依らない不定性として §3.1 で議論した θ-空間 ϑ における変換の path dependence から生じる不定性、つまり

$$\hat{\mathcal{L}}_{\rm BI}|_{\tilde{\theta}} - \hat{\mathcal{L}}_{\rm BI}|_{\theta} = \int_{\rm path} \delta\hat{\mathcal{L}}_{\rm BI}. \tag{48}$$

の path 依存性が一般にはあるが (43) で見たように今の $U(1)$ の場合は up to $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ の近似では効かない。

3.4 まとめ

Seiberg-Witten が提案した gauge equivalence relation から決める異なる非可換代数上の非可換ゲージ場の間の変換 (Seiberg-Witten map) は、一般には大きな不定性があるが、少なくとも $U(1)$ で $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ を無視する Born-Infeld 作用の (44) の θ independence の証明 [3] は結果として正当化される。

$U(N), N \geq 2$ の場合や（非可換）Born-Infeld 作用の $\mathcal{O}(\partial F)$ など高次の補正項まで含める議論をする場合は、オリジナルの Seiberg-Witten 変換（(27) で $\alpha = \beta = 0$ としたもの）には上で見てきた大きな不定性があることを踏まえて慎重に議論すべきであろう。

ただこれらの不定性は (27)(29) より
[ゲージ場に依存するゲージ変換 +（ゲージ場の量子数を保つ）場の再定義] で吸収できる形をしている。ただしもともとの $*$ 積の非局所性からこの不定性を吸収するための場の再定義は非常に非局所的になりうるので、実際の非可換ゲージ理論における S 行列の計算などでこの不定性が物理に効いてくる可能性がある。$*$ 積の性質から場の再定義の非局所性が非常にうまくまとまって、実は普通の可換な場の理論のときと同様に物理に効かない可能性もあるかもしれないが、それをみるには非可換空間上の場の理論をまじめに解析しなければならない。特に space-time の非可換性がある場合つまり $\theta^{0i} \neq 0$ の場合は普通の場合の Hamilton 形式を素朴に適用できなくて量子化そのものをきちんと考え直さなければならない。

4　変形量子化

非可換時空を扱う一つの方法として変形量子化の手法を考えよう。ここでは数学でいうところの変形量子化の問題を簡単に述べる。

4.1　Poisson 構造

$\mathcal{A}$: $\mathbb{R}$ 可換代数[34]に対し、$\{\ ,\ \} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ は次の条件をみたすとき Poisson 構造であるといわれる：

(1) $\mathbb{R}$ 双線形：

$$\{af + bg, h\} = a\{f, h\} + b\{g, h\},\ \{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + b\{f, h\}, \quad a, b \in \mathbb{R}, f, g, h \in \mathcal{A} \tag{49}$$

(2) 反対称：

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{50}$$

(3) Jacobi 恒等式を満たす：

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{51}$$

(4) 「Leibniz 則」を満たす：

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \tag{52}$$

この Poisson 構造の具体例は Poisson 多様体 (M, α) の Poisson 括弧 $[\ ,\ ]_{\mathrm{P.b.}}$ であり（この場合 $\mathcal{A} = C^\infty(M)$. §A.1 参照。）、以降主にその場合を考える。

[34] つまり、$\mathcal{A}$ の元 f, g に対し $f \cdot g = g \cdot f \in \mathcal{A}$ となる可換な積 $\cdot$ があるとする. この $\cdot$ はしばしば略される。

4.2 変形量子化

可換代数 $\mathcal{A}$ の可換な積 $\cdot$ を $\hbar$ というパラメータで変形し、非可換な $*$ 積を入れることを考える。そのためにまず $\mathcal{A}$ を $\hbar$ の形式的冪級数に拡張したものを $\mathcal{A}[[\hbar]]$ と書く：[35]

$$\mathcal{A}[[\hbar]] := \{f = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k f_k \mid f_k \in \mathcal{A}\} . \tag{53}$$

$\boxed{\text{変形量子化の問題}}$

$\mathcal{A}$ に Poisson 構造 $\{\ ,\ \}$ が入っているとき、$\mathcal{A}[[\hbar]]$ に次を満たす $*$ 積 $\mathcal{A}[[\hbar]] \times \mathcal{A}[[\hbar]] \to \mathcal{A}[[\hbar]]$ [36]を構成せよ。

1. 初項の条件：$\mathbb{R}$ 双線型な $M_k(\ ,\ )$ を用いて

$$f * g = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k M_k(f,g), \quad \forall f, g \in \mathcal{A}[[\hbar]] \tag{54}$$

と書け、

$$M_0(f,g) = fg, \ M_1(f,g) - M_1(g,f) = i\{f,g\} \tag{55}$$

を満たす。

2. 結合律を満たす：[37]

$$f * (g * h) = (f * g) * h, \quad \forall f, g, h \in \mathcal{A}[[\hbar]]. \tag{56}$$

変形量子化の問題は数学の問題として symplectic 多様体 (M, ω) の場合 symplectic 構造 ω から自然に入る Poisson 構造（§A.2参照）に対し De Wilde-Lemonte, Omori-Maeda-Yoshioka, Fedosov らによって解かれ（[16][8]）、より一般の Poisson 多様体 (M, α) の場合に Kontsevich[13] によって解かれた。[38]また Kontsevich[13] による構成法は Cattaneo-Felder[14] によって経路積分表式が得られている。

量子化と言っている物理的意味は普通の可換な積 $\cdot$ を変形して $*$ 積にすることが、古典力学から量子力学に移行するとき位相空間の Poisson 括弧 $[f,g]_{\mathrm{P.b.}}$ を（Planck 定数 $\hbar$ を入れて）Hilbert 空間の作用素の交換子 $[\hat{f}, \hat{g}]$ で置き換えることと対応しているためだと思われる。つまり変形量子化の定義から

$$\frac{1}{i\hbar}(f * g - g * f) \to [f,g]_{\mathrm{P.b}} \quad (\hbar \to 0) \tag{57}$$

という関係にある。この意味では積の変形パラメータ $\hbar$ は Planck 定数そのものであるが、以下の非可換幾何学に現れる $*$ 積としてみるときはとりあえず形式的なパラメータとする。[39]

---

[35]形式的冪級数と言っているときは $\hbar$ の普通の意味の収束半径は気にしない。

[36]つまり $f * g \in \mathcal{A}[[\hbar]], \ \forall f, g \in \mathcal{A}[[\hbar]]$

[37]したがって曖昧さなしに $f * g * h$ 等と書ける。

[38]それら以前の文献としては [15] が代表的である。

[39]時空の座標の非可換性のパラメータを何らかの意味で Planck 定数と解釈できれば本来の変形「量子化」とみてよいかもしれない。

4.3 $*$ 積の構成

変形量子化の問題を解くための最も素朴な $*$ 積の構成法は定義に従い $\hbar$ の order by order で腕力で計算するという方法である。試しに Poisson 多様体 (M, α) の場合に $*$ 積の始めの方を求めてみよう。

一般に $*$ 積 (54) が結合律 (56) をみたすことから

$$\sum_{l=0}^{k} M_l(f, M_{k-l}(g,h)) = \sum_{l=0}^{k} M_l(M_{k-l}(f,g),h), \quad \forall f,g,h \in \mathcal{A}[[\hbar]], k = 0,1,\cdots \tag{58}$$

が要求される。

(58) の $k=0$ の条件は (55) より可換な普通の積が結合律を満たすことから自明に満たされる。

(58) の $k=1$ の条件は

$$M_1(f, gh) - M_1(fg, h) = M_1(f,g)h - fM_1(g,h) \tag{59}$$

であるが $M_1 = M_1^+ + M_1^-, M_1^\pm(f,g) = \pm M_1^\pm(g,f)$ のように対称部分と反対称部分に分けると反対称部分は (55) より Poisson 構造から $M_1^-(f,g) = \frac{i}{2}\{f,g\}$ と定まり、Leibniz 則 (52) から (59) は結局対称部分の条件に帰着し、特に $M_1^+(f,g) = 0$ と定めると自明に満たされる。

(58) の $k \geq 2$ の条件は

$$\begin{aligned} &fM_k(g,h) - M_k(fg,h) + M_k(f,gh) - M_k(f,g)h \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} (M_l(M_{k-l}(f,g),h) - M_l(f, M_{k-l}(g,h))) \end{aligned} \tag{60}$$

と書き換えられ、右辺の $M_l, l \leq k-1$ が定まれば M_k の満たすべき条件が決まり、これを順次解いていくことで $*$ 積が定まる。

例として $k=2$ の場合を求めてみよう。簡単のため前述の $M_1(f,g) = \frac{i}{2}\{f,g\}$ の場合を考え、さらに $M_2(f,g) = M_2(g,f)$ と仮定する。この場合 (60) は

$$\begin{aligned} &fM_2(g,h) + M_2(f,gh) - (f \leftrightarrow h) = -\frac{1}{4}\{\{f,h\},g\} \\ &= -\frac{1}{4}\alpha^{ij}\partial_i\alpha^{kl}\partial_k f\partial_j g\partial_l h - \frac{1}{4}\alpha^{ij}\alpha^{kl}(\partial_i\partial_k f\partial_j g\partial_l h - \partial_l f\partial_j g\partial_i\partial_k h) \end{aligned} \tag{61}$$

となるが微分の階数と足のつぶし方、対称性の仮定より

$$\begin{aligned} M_2(f,g) \;&=\; a\alpha^{ij}\alpha^{kl}\partial_i\partial_k f\partial_j\partial_l g + b\partial_i\alpha^{ij}\alpha^{kl}(\partial_k f\partial_j\partial_l g + \partial_j\partial_l f\partial_k g) \\ &\quad + c\alpha^{ij}\partial_i\alpha^{kl}(\partial_k f\partial_j\partial_l g + \partial_j\partial_l f\partial_k g) \end{aligned} \tag{62}$$

(a,b,c は未定定数。) とおけてこれを (61) に代入すると未定定数 a,b,c が求まって結局

$$M_2(f,g) = -\frac{1}{8}\alpha^{ij}\alpha^{kl}\partial_i\partial_k f\partial_j\partial_l g - \frac{1}{12}\alpha^{ij}\partial_i\alpha^{kl}(\partial_k f\partial_j\partial_l g + \partial_j\partial_l f\partial_k g) \tag{63}$$

となる。$\hbar$ の3次以上は、こうして定まった M_1, M_2 を (60) の右辺に代入して求めていく。
この例では

$$M_1(f,g) = -M_1(g,f),\ M_2(f,g) = M_2(g,f) \tag{64}$$

という対称性をもつ Poisson 多様体 (M,α) 上の変形量子化の条件を満たす $*$ 積を $\hbar$ の2次まで求めたが、必ずしもこの対称性を仮定する必要はなく、一般には $*$ 積を構成するためには不定性があることに注意する。また、この腕力によって $\hbar$ の高次の項まで求めるのは適当に対称性を仮定したとしても大変な計算になる。次節からの Fedosov の $*$ 積の構成法は M が symplectic 多様体の場合にこれを一度に求めてしまうものであると同時に $*$ 積を定義するときの手で選べる自由度（あるいは不定性）もわかるものになっている。

5 Fedosov の $*$ 積

5.1 Fedosov の $*$ 積

ここでは Fedosov が任意の symplectic 多様体上に構成した $*$ 積を紹介する。[40]

5.1.1 Weyl 代数束

$2n$ 次元の symplectic 多様体 (M,Ω_0) を考えよう。ここでは M の symplectic 構造を Ω_0 とする。まず M 上に Weyl 代数束を構成しよう。

M の接束 TM と同型な rank が $2n$ の M 上の symplectic ベクトル束 (L,ω) を考える。そして L に symplectic 接続 ∇_L が一つ入っているとする。[41]この束同型を

$$\begin{aligned}\theta &: TM \to L,\\ \delta &: L^* \to T^*M\end{aligned} \tag{65}$$

と書くことにする。L の局所 frame を $(e_1,\cdots,e_{2n})$ とし、L^* の双対 frame を $(e^1,\cdots,e^{2n})$ とする。これに対応する互いに双対な TM, T^*M の基底をそれぞれ X_i, θ^i とし[42]次の正規直交関係が成り立つものとする：

$$\begin{aligned}&\theta^i = \delta(e^i),\ e_j = \theta(X_j),\\ &\langle e^i, e_j\rangle_L = \langle e^i, \theta(X_j)\rangle_L = \langle \delta(e^i), X_j\rangle_{TM} = \langle \theta^i, X_j\rangle_{TM} = \delta^i_j.\end{aligned} \tag{66}$$

---

[40]Fedosov の $*$ 積の応用では原論文 [8] に基づく構成法で議論されることが多いが、ここではそれを少し一般化した [9] の構成法について議論する。物理への応用では $*$ 積を行列値関数の上にまで拡張しておく [9] のほうが自然である。

[41]L を考えるのは後で述べる y^i の取り方を一般にするためであり、必要ないときは簡単のため $L = TM$ と考えてよい。ただし §8 の具体例ではこの L の自由度のおかげで露わな表式を得ることができる。

[42]X_i は M のベクトル場、θ^i は M の 1-form である。

この同型のもとで L の symplectic form ω は次の M の非退化な 2-form Ω_0：[43]

$$\Omega_0 = -\frac{1}{2}\omega_{ij}\theta^i \wedge \theta^j. \tag{67}$$

に写るが、これを M の symplectic form Ω_0 と同一視する。ここで $d\Omega_0 = 0$ を満たさねばならない。ω が始めに固定されているとき θ^i を $d\Omega_0 = 0$ を満たす範囲で M の symplectic 構造を変えることができる。さらに M 上に接続 $\nabla_{\mathcal{E}}$ を持つ複素ベクトル束 $\mathcal{E}$ を導入し、構成したい Weyl 代数束の係数束を $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) =: \mathcal{A}$ とする。以下では $\mathcal{E}$ の rank を N として Weyl 代数束の係数は $N \times N$ 行列とみなす。[44]（ただし、行列の足は書かないことにする。）

M の各点 $x \in M$ 上のファイバー L_x では線形 symplectic 空間なので普通の Moyal 積を入れて Weyl 代数 $W(L, \mathcal{A})$ を作ることができる。（ただし係数は $\mathcal{A}_x$ 値とする。）つまりその元は次の形をしたもので、

$$a(y, \hbar) = \sum_{2k+p\geq 0, k\geq 0} \hbar^k \frac{1}{p!} a_{k,i_1\cdots i_p} y^{i_1} \cdots y^{i_p} \tag{68}$$

（ここで $\hbar$ が変形量子化のパラメータで $y = (y^1, \cdots, y^{2n})$ はファイバー L_x の線型座標、係数の $a_{k,i_1\cdots i_p} \in \mathcal{A}_x$ は $i_1, \cdots, i_p$ について完全対称なものとする。）積は次の Moyal 積で入れる：[45]

$$\begin{aligned} a \circ b &:= a \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^i}\omega^{ij}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^j}\right) b \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^n \omega^{i_1 j_1} \cdots \omega^{i_n j_n} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial y^{i_n}} a \frac{\partial}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial y^{j_n}} b. \end{aligned} \tag{69}$$

この $\circ$ 積は普通の Moyal 積なので結合的であり、L_x の座標 y^i を ω_{ij} に関する symplectic 変換をしても不変である。[46]以下で必要になるのでここで次数（deg とかく）を導入しておく：$\mathrm{deg}\hbar = 2, \mathrm{deg} y^i = 1$.
したがって (68) の各項は degree $2k + p \geq 0$ であり $\circ$ 積はこの次数を保存する。

各点 x で作った Weyl 代数を貼り合わせたもの $W(L, \mathcal{A}) = \cup_{x\in M} W_x(L, \mathcal{A})$ で M 上の Weyl 代数束を定める。つまり、その section は次の形で与えられる：

$$a(x, y, \hbar) = \sum_{2k+p\geq 0, k\geq 0} \hbar^k \frac{1}{p!} a_{k,i_1\cdots i_p}(x) y^{i_1} \cdots y^{i_p}. \tag{70}$$

ここで各項の係数 $a_{k,i_1\cdots i_p}(x)$ は $\mathcal{A}$ の section である。今の場合、$N \times N$ 行列値の p 階対称テンソル場とみなせる。

---

[43] (-1) 倍したのは Fedosov の convention に合わせるためであり特に意味はない。

[44] このように拡張したものを考えるのは N 枚重なった D-brane の world volume 理論に対応したものにしたいからである。

[45] もちろん係数の行列の積もとる。また ω^{ij} は ω_{ij} の逆行列である：$\omega_{ik}\omega^{kj} = \delta_i^j$.

[46] ω^{ij} は一般に M の座標 x^i には依存するが y^i には依存しないので、$\frac{\partial}{\partial y^i}$ と ω^{ij} のかかる順序を交換できるので普通の Moyal 積と同じ定義でよい。

容易にわかるように $W(L,\mathcal{A})$ の center Z は y^i に依存せず $\mathcal{A}$ の単位元に比例するものからなる。[47]

さらに M 上の微分形式として $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ を考える。[48]つまり、その section は

$$a(x,y,\hbar)=\sum_{2k+p\geq 0,k\geq 0}\hbar^k\sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{p!q!}a_{k,i_1\cdots i_p,j_1\cdots j_q}(x)y^{i_1}\cdots y^{i_p}\theta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{j_q} \tag{71}$$

という形で表されるものである。ここで $a_{k,i_1\cdots i_p,j_1\cdots j_q}(x)$ は $i_1\cdots i_p$ に関しては対称で $j_1\cdots j_q$ に関しては反対称なテンソル場である。$W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の section の積を y^i に関する $\circ$ 積と行列の積と θ^i の wedge 積を同時にとることで定義すると $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ も代数を成している。(上と同様にこれも $a\circ b$ と表わす。) $\deg_a a$ を a の微分形式の次数とすると $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ は $\circ$ 積に関して $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ graded 代数をなす。つまり $\circ$ 積は deg も $\deg_a$ も保存する。そこで以下では交換子 $[\ ,\ ]$ を

$$[a,b]:=a\circ b-(-1)^{(\deg_a a)(\deg_a b)}b\circ a \tag{72}$$

で定義する。この交換子を使って $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の central p-form を次のように定義する：

$$Z\otimes\wedge^p=\{c\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^p\mid [c,a]=0,\forall a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\}. \tag{73}$$

これは結局 y^i を含まず、単位行列に比例する p-form である。

$W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ のうち $\deg\geq k$ の元からなるものを $W_k(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ とかくとこれはフィルターを成していることに注意しておく：

$$\begin{aligned}&W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\supset W_1(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\supset W_2(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\supset\cdots,\\&W_k(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\circ W_l(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\subset W_{k+l}(L,\mathcal{A})\otimes\wedge.\end{aligned} \tag{74}$$

5.1.2 Weyl 代数束の接続

上で構成した Weyl 代数束 $W(L,\mathcal{A})$ に接続 D を導入しよう。

まず $L,\mathcal{E}$ の接続 $\nabla_L,\nabla_{\mathcal{E}}$ により $W(L,\mathcal{A})$ 上に基本となる接続
$\nabla=\nabla_L+\nabla_{\mathcal{E}}:\ W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^q\to W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^{q+1}$ が定まる。これは局所的に次のように書ける：

$$\begin{aligned}\nabla a&=da-\sum_{2k+p\geq 1}\hbar^k\sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{(p-1)!q!}\Gamma^m{}_{i_p}\wedge a_{k,mi_1\cdots i_{p-1},j_1\cdots j_q}y^{i_1}\cdots y^{i_p}\theta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{j_q}\\&\quad+[\Gamma_{\mathcal{E}},a]\\&=da+\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\Gamma_{ij}y^iy^j,a\right]+[\Gamma_{\mathcal{E}},a].\end{aligned} \tag{75}$$

[47]もちろんここでの $W(L,\mathcal{A})$ の center という意味は $Z=\{a\in W(L,\mathcal{A})\mid a\circ b=b\circ a,\ \forall b\in W(L,\mathcal{A})\}$ である。

[48]ここで $\wedge$ は M 上の T^*M の外積代数を表している。

ここで $d = dx^\mu \partial_\mu = \theta^i X_i$ は M の外微分であり $\Gamma_{ij} := \omega_{ik}\Gamma^k{}_j$ は ∇_L の接続形式、[49] $\Gamma_\mathcal{E}$ は $\nabla_\mathcal{E}$ の接続形式とする。このとき ∇, ∇_L は $\circ$ 積に関して graded derivation になっている：

$$\nabla(a \circ b) = \nabla a \circ b + (-1)^{\deg_a a} a \circ \nabla b, \ \nabla_L(a \circ b) = \nabla_L a \circ b + (-1)^{\deg_a a} a \circ \nabla_L b.$$

$W(L, \mathcal{A})$ の接続として ∇ をさらに一般化して次の形のものを導入する：

$$Da = \nabla a + \frac{i}{\hbar}[\gamma, a] \ . \tag{76}$$

ここで γ は $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^1$ の *global* section である。 D は明らかに $\circ$ 積に関して graded derivation である： $D(a \circ b) = Da \circ b + (-1)^{\deg_a a} a \circ Db$.
(76) の γ は与えられた D に対し up to central 1-form で決まることに注意しよう。[50] D を 2 回作用させると

$$D^2 a = \frac{i}{\hbar}[\Omega, a], \qquad \forall a \in W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge. \tag{77}$$

となる。ここで Ω は D の curvature で

$$\begin{aligned} \Omega &:= R + \nabla\gamma + \frac{i}{\hbar}\gamma \circ \gamma, \\ R &:= \frac{1}{2}R_{ij}y^i y^j - i\hbar R_E, \\ R_{ij} &:= \omega_{ik}R^k{}_j = \omega_{ik}(d\Gamma^k{}_j + \Gamma^k{}_l \wedge \Gamma^l{}_j) \\ R_E &= d_x\Gamma_\mathcal{E} + \Gamma_\mathcal{E} \wedge \Gamma_\mathcal{E}, \end{aligned} \tag{78}$$

のように表される。R_{ij}[51] は ∇_L の symplectic curvature で R_E は $\nabla_\mathcal{E}$ の field strength である。

5.1.3 Abelian Connection

前節で $W(L, \mathcal{A})$ の接続の一般形 D (76) を導入したが、ここではそのうち Abelian connection と呼ばれる特別な接続を考える。これは Fedosov の $*$ 積を定義するために重要な役割を果たすことになる。

まず準備として $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ に次のような次数を上げ下げする作用素 δ, δ^{-1} を導入する：[52]

$$\begin{aligned} &\delta = \theta^i \frac{\partial}{\partial y^i} && : W_p(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^q \ \rightarrow \ W_{p-1}(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^{q+1}, \\ &\delta^{-1} = \begin{cases} y^i I(X_i)\frac{1}{p_y+q} & (p_y + q > 0) \\ 0 & (p_y + q = 0) \end{cases} && : W_p(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^q \ \rightarrow \ W_{p+1}(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^{q-1} \end{aligned} \tag{79}$$

[49] T(75) の 2 番目の等式は $\omega_{ij} =$ 定数、つまり Darboux 座標のとき成り立つ。$\omega_{ij} =$ 定数のとき $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ が成り立つことに注意しよう。(実際 $\nabla_L e_i = e^j \nabla_{Lj} e_i = \Gamma^k{}_{ij} e^j e_k = \Gamma^k{}_i e_k$ とすると ∇_L が $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j$ に関して symplectic であることから $0 = \nabla_{Lk}\omega_{ij} := \partial_k \omega_{ij} - \omega_{lj}\Gamma^l{}_{ik} - \omega_{il}\Gamma^l{}_{jk} = \Gamma_{jik} - \Gamma_{ijk}$ if $\partial_k \omega_{ij} = 0$ となる。)

[50] [8][9] ではこの central 1-form を 0 にとることでこの不定性を固定しているがここではこの自由度を残しておくことにする。

[51] symplectic connection ∇_L は $\nabla_L \omega_{ij} = 0$ を満たすことから $R_{ij} = R_{ji}$ が成り立つ。

[52] 直後に述べるように δ^{-1} は δ の逆作用素ではない。紛らわしい記号だが Fedosov の notation にしたがった。

$I(X_i)$ は内部積、p_y は y の次数（つまり作用する項の y^i の数。）、$q = \deg_a$ である。δ は M の外微分 d と同様な式をみたす：

$$\begin{aligned} \delta^2 &= 0, \ (\delta^{-1})^2 = 0, \\ \delta(a \circ b) &= \delta a \circ b + (-1)^{\deg_a a} a \circ \delta b, \\ a &= \delta\delta^{-1} a + \delta^{-1}\delta a + a_{00}. \end{aligned} \tag{80}$$

ここで a_{00} は a の 0-form の y^i を含まない項である。三番目の式は Hodge-de Rham 分解のような式である。しかし δ は x の微分を含まない純代数的な作用素であることに注意する。実際、交換子を用いて表すことができる：

$$\delta a = -\frac{i}{\hbar}[\omega_{ij} y^i \theta^j, a] \ . \tag{81}$$

では Abelian connection の定義を述べよう：

$$\boxed{D \text{ が } \textit{Abelian} \text{ connection} \Leftrightarrow D^2 a = 0, \ \forall a \in W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge}$$

つまり D の curvature Ω が central 2-form $\Omega \in Z \otimes \wedge^2$ になるということである。この場合 Bianchi identity[53]は $D\Omega = d\Omega = 0$ となり Ω が closed であるべしということになる。これらの Ω に対する条件により Abelian connection を与える γ の形が制限される。

Fedosov による次の定理が基本的である：

定理 次の形の Abelian connection が存在する [8][9]：

$$\begin{aligned} &Da = \nabla a - \delta a + \frac{i}{\hbar}[r, a] = \nabla a + \frac{i}{\hbar}[\omega_{ij} y^i \theta^j + r, a], \\ &\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \\ &\Omega_0 = -\frac{1}{2}\omega_{ij}\theta^i \wedge \theta^j \ . \end{aligned} \tag{82}$$

ここで Ω_0 は M の symplectic form であり、Ω_1 は次数が 2 以上の closed central 2-form[54]で $r \in W_2(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^1$ である。

実際、与えられた ∇, $\Omega_1 \in Z \otimes \wedge^2$, $\deg \geq 2$, $\mu \in W_3(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^0, \mu|_{y=0} = 0$, に対し[55]

$$\begin{aligned} \delta r &= \nabla(\omega_{ij} y^i \theta^j) + R - \Omega_1 + \nabla r + \frac{i}{\hbar} r \circ r, \\ \delta^{-1} r &= \mu \end{aligned} \tag{83}$$

を満たす r が一意的に存在し、この r を用いて Abelian connection が (82) の形で一つ定まる。[56]

---

[53] $\delta\nabla a = -\nabla\delta a, \nabla^2 a = \frac{i}{\hbar}[R, a], \nabla R = 0, \delta R = 0$ に注意すると一般に $D\Omega = 0$ となっていることがわかる。

[54] 従って $\hbar^1$ の因子を含む。

[55] §6.1 で詳しくみるように $\mu = \sum_{p \geq 1, k \geq 0} \hbar^k \frac{1}{p!} \mu_{k, i_1 \cdots i_p}(x) y^{i_1} \cdots y^{i_p}$ と書くとき Da の表式で $\hbar$ の負冪があらわれないようにするため $\mu_{0, i_1 \cdots i_p}(x)$ が単位行列に比例すべしという条件も必要である。

[56] 第 1 式は (78) の Ω の式に (82) の第 2 式と $\gamma = \omega_{ij} y^i \theta^j + r$ を代入すれば得られる。

これは (80) を使うと

$$r = \delta\mu + \delta^{-1}\left(\nabla(\omega_{ij}y^i\theta^j) + R - \Omega_1\right) + \delta^{-1}\left(\nabla r + \frac{i}{\hbar} r \circ r\right) \tag{84}$$

と等価であることがわかる。実際 (83)→(84) は $r = \delta\delta^{-1}r + \delta^{-1}\delta r$ から直ちに従う。(83)←(84) であるが $\mu|_{y=0} = 0$ の仮定から $\delta^{-1}r = \mu$ が成り立つ。(83) の第 1 式は Bianchi identity から従う。[57]

(84) を漸化式とみて r を一意に定めることができる。実際 $\nabla, \circ$ が次数を保存し、δ^{-1} が次数を 1 だけ上げることに注意すると (84) の右辺の第 1 項, 第 2 項（つまり iterarion の初項）は $W_2(L, \mathcal{A})$ に入っていることから第 3 項はからの r への寄与は iteration により次数が 1 ずつ上がったものになる。つまり iteration を繰り返すたびにどんどん次数があがっていき無限回 iteration を繰り返せば r が定まる。[58]（この次数の議論が成立するように $\deg\mu \geq 3$, $\deg\Omega_1 \geq 2$ の次数の仮定を置いた。）

また r を次のように分解することもできる。r の対称な添え字（y^i の添え字とつぶす部分）と form の添え字を合わせた全体で対称な部分 r_s とそれ以外の部分の r_a の和に分ける：

$$\begin{aligned} r_s &:= \sum_{2k+l\geq 2} \hbar^k \frac{1}{l!} r_{k,(i_1\cdots i_l,j)} y^{i_1}\cdots y^{i_l}\theta^j, \\ r_a &:= r - r_s\,. \end{aligned} \tag{85}$$

すると (83)(84) は

$$\begin{aligned} &\delta^{-1}r_s = \mu, \qquad \delta r_s = 0, \\ &\delta^{-1}r_a = 0, \qquad \delta r_a = \nabla(\omega_{ij}y^i\theta^j) + R - \Omega_1 + \nabla r_s + \frac{i}{\hbar} r_s \circ r_s + \nabla_s r_a + \frac{i}{\hbar} r_a \circ r_a, \\ &\to r_s = \sum_{2k+l\geq 2} \hbar^k \frac{1}{l!} \mu_{k,i_1\cdots i_l j} y^{i_1}\cdots y^{i_l}\theta^j, \\ &\to r_a = \delta^{-1}\left(\nabla(\omega_{ij}y^i\theta^j) + R - \Omega_1 + \nabla r_s + \frac{i}{\hbar} r_s \circ r_s\right) + \delta^{-1}\left(\nabla_s r_a + \frac{i}{\hbar} r_a \circ r_a\right) \end{aligned} \tag{86}$$

と書き換えられる。ただし $\nabla_s a := \nabla a + \frac{i}{\hbar}[r_s, a]$ とした。この式からわかるように μ は r_s を定める部分である。[59]

---

[57] (83) の第 1 式の (右辺)−(左辺) を A としよう。$\delta^{-1}A = \delta^{-1}(\nabla(\omega_{ij}y^i\theta^j) + R - \Omega_1 + \nabla r + \frac{i}{\hbar} r \circ r) - \delta^{-1}\delta r = r - \delta\mu - (r - \delta\delta^{-1}r) = \delta(\mu - \delta^{-1}r) = 0$,（2 つ目の等式で (84) を 3 つ目の等式で (83) の第 2 式を用いた。）$DA = D(\Omega - \Omega_0 - \Omega_1) = D\Omega - d\Omega_0 - d\Omega_1 = 0$（1 つ目の等式では $\gamma = \omega_{ij}y^i\theta^j + r$ としたとき、つまり今の D の curvature を Ω とした。2 つ目の等式は Bianchi identity および Ω_0, Ω_1 が central 2-form であることから従う。）に注意する。$DA = 0$ より $\delta^{-1}\delta A = \delta^{-1}(D + \delta)A$ したがって $\delta^{-1}A = 0$ から $A = \delta^{-1}(D + \delta)A$ となるが $D + \delta = \nabla + \frac{i}{\hbar}[r, \ ]$ は次数を減らさない（r 以下に見るように (84) から $\deg r \geq 2$ となる。）ので $\delta^{-1}(D + \delta)A$ は A より次数が増えているはずでこれが矛盾しないためには $A = 0$ である。

[58] ただしここでは $\hbar, y^i$ に関する形式的冪級数の意味で言っていて、普通の意味での収束性は議論しないことにする。

[59] ちなみに [8] では手で $\mu = 0$ つまり $r_s = 0$ としてその場合しか議論していない。[9] では μ の自由度も取り入れて考えている。Fedosov の $*$ 積を用いている文献では [8] の $\mu = 0$ の場合のみ議論しているものが多いが、μ という大きな自由度が入りうることに注意すべきである。

以上より、与えられた Ω_1, ∇, μ に対し Abelian connection D を与える r を (84) から次数の order by order で求めることができるのだが一般の場合に full order で explicit に r を与える公式は今のところ得られていないようである。[60]

5.1.4 Flat Section と Fedosov の $*$ 積の定義

$D^2 = 0$ を満たす Abelian connection D に対し自然に Ker$D$ が考えられるが、これを *flat section* と呼ぶことにする。微分形式の各次数に応じて

$$\wedge^p W_D := \{a \in W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^p \mid Da = 0\} = \mathrm{Ker}D \cap W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^p \tag{87}$$

と表記しよう。またこれらを全部まとめて
$\wedge W_D := \{a \in W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge \mid Da = 0\} = \mathrm{Ker}D \cap W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ と書く。D は $\circ$ 積に関して derivation であることから flat section $\wedge W_D$ は $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ の部分代数をなしている。[61]

flat section のうち特に 0-form が重要になる部分であり $W_D := \wedge^0 W_D$ とおく。実際 W_D 元は $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の元は 1 対 1 に対応している。非可換空間上の場の理論を考えたいときに adoint スカラー場は $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の元とみなしたいので、この対応は $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ のかわりに W_D を考えてもよいということを示唆している。この対応の map を具体的に与えよう。まず

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ & W(L, \mathcal{A}) \to C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \\ & a \mapsto \sigma(a) := a|_{y=0}, \end{aligned} \tag{88}$$

とおく。この σ を W_D に制限したものも σ と書くと実はこの σ が W_D から $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ への 1 対 1 写像を与える。また $a \in W_D$ に対し $Da = 0$ より $\delta^{-1}(D+\delta)a = \delta^{-1}\delta a$ なので (80) を用いると $\delta^{-1}(D+\delta)a = a - a_{00}$ となることに注意すると σ の逆写像は

$$a = a_0 + \delta^{-1}(D+\delta)a \tag{89}$$

を iteration で解いたものである。$D + \delta = \nabla + \frac{i}{\hbar}[r, \ ]$ は次数を下げないことに注意するとこの右辺第 2 項は次数を増やしていく、つまり r を求める iteration と同様な意味でこの解は一意的に定まる。r のときと違って a について 1 次の式なので (89) は形式的には解けて

$$\begin{aligned} a = Q(a_0) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\delta^{-1}(D+\delta)\right)^k a_0 \\ &= \sum_{\substack{l \geq 0 \\ n_1, n_2, \cdots, n_{l+1} \geq 0}} (\delta^{-1}\nabla)^{n_1}\delta^{-1}[\frac{i}{\hbar}r, (\delta^{-1}\nabla)^{n_2}\delta^{-1}[\frac{i}{\hbar}r, \cdots, (\delta^{-1}\nabla)^{n_l}\delta^{-1}[\frac{i}{\hbar}r, (\delta^{-1}\nabla)^{n_{l+1}}a_0]\cdots]] \end{aligned} \tag{90}$$

[60] M が affine locally symmetric Kähler の場合には μ をうまく選ぶことで exact に r を求めることができる。(§9.3 参照)
[61] つまり $a, b \in \wedge W_D$ に対し $a \circ b \in \wedge W_D$ となる。

と表される。[62]

以上から W_D 上 $Q\sigma = \mathrm{id.}$ であり、$C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ 上 $\sigma Q = \mathrm{id.}$ である。すなわち

$$\boxed{W_D \overset{1:1}{\longleftrightarrow} C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}}$$

の対応で σ が $\rightarrow$ を Q が $\leftarrow$ を与える。

この対応により W_D 上の $\circ$ 積を用いて $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ 上に $*$ 積を定義できる：

$$a_0 * b_0 = \sigma(Q(a_0) \circ Q(b_0)), \quad a_0, b_0 \in C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}. \tag{92}$$

$\circ$ 積が結合的であることからこの $*$ 積も結合的であることがわかる。また $\hbar$ の展開の始めの方は§6.1で詳しくみるように $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の単位行列に比例する元同士の $*$ 積は変形量子化の初項の条件を満たしている。つまりこのFedosovの $*$ 積は任意のsymplectic多様体 (M, Ω_0) 上の関数環 $C^\infty(M)$ の変形量子化の解を与えている。[63]

§7にこの構成法による $*$ 積のもっとも簡単な例を載せた。それは非可換性が定数 $\vartheta^{\mu\nu}$ で表されMoyal型と一致するものになっている。§8では2次元 $(n=1)$ の場合の非自明な例を示す。

5.2 代数の同型、自己同型

§5.1ではAbelian connection D に互いに同型な $(W_D, \circ)$ と $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ を定義した。ここでは2つのAbelian connection D, D' があるとき $(W_D, \circ)$ と $(W_{D'}, \circ)$ の間の同型、したがってそれから誘導される $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ と $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *')$ の間の同型を議論する。

まず $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ の自己同型を考えよう。そのために $W(L, \mathcal{A})$ を含む W^+ を導入する：

$$W^+ = \{U = \sum_{l=0}^\infty \sum_{2k+p=l,\ \text{有限和}} \hbar^k \frac{1}{p!} U_{k,i_1,\cdots i_p} y^{i_1} \cdots y^{i_p} \mid U_{k,i_1,\cdots i_p} \in C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}\} \tag{93}$$

つまりこれは $W(L, \mathcal{A})$ と違って $\hbar$ の負冪を許すものである。W^+ の元で次数0の項が1である

$$U = \exp_\circ\left(\frac{i}{\hbar} H_3\right) := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{\hbar} H_3\right)^k, \ H_3 \in W_3'(L, \mathcal{A}), \tag{94}$$

---

[62] とくに $r=0$ の場合は簡単になって

$$Q(a_0) = \sum_{k=0}^\infty (\delta^{-1}\nabla)^k a_0 = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \nabla_{(i_1} \cdots \nabla_{i_k)} a_0 y^{i_1} \cdots y^{i_k} \tag{91}$$

となる。

[63] この構成法ではAbelan connection D の元になる接続 ∇ を定める必要があるが任意のsymplectic多様体にはsymplectic接続が存在することが知られているので $L = TM$ の場合を考えると少なくとも一つは変形量子化の解を与える $*$ 積を構成できる。

の形をもつものは $\circ$ 積に関して群をなすことに注意する。ここで $W_3'(L,\mathcal{A})$ $(\subset W_3(L,\mathcal{A}))$ は単位行列に比例する成分は $W_3(L,\mathcal{A})$ の元で、その他の成分は $W_3(L,\mathcal{A})$ の元でかつ $\hbar$ の因子を含むものとする。[64] この U を用いて

$$a \mapsto U^{-1}\circ a\circ U = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^k [H_3,[H_3,\cdots,[H_3,a]\cdots]] \tag{95}$$

という変換を考えるとこれは $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の *fiberwise* な自己同型写像になっている。[65] この写像は次数は保存しないが filtration を保つ、すなわち $a\in W_k(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ ならば $U^{-1}\circ a\circ U\in W_k(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ である。[66]

さらに section の support を動かす $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の自己同型写像も考えられる。つまり diffeomorphism $f: M\to M$ （およびその L や $\mathcal{E}$ への lifting）に対し

$$A: a\mapsto f_*(U^{-1}\circ a\circ U),\qquad a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge, \tag{96}$$

も自己同型写像になっている。ここで f に対応する pushforword f_* および pullback f^* は次のように定義されるものである。[67]

$$\begin{aligned}
\sigma_f(x) &: L_x\to L_{f(x)},\quad (\sigma_f(x))^k{}_i\omega_{kl}(f(x))(\sigma_f(x))^l{}_j=\omega_{ij}(x),\\
v(x) &: \mathcal{E}_x\to\mathcal{E}_{f(x)},\\
f^*a(x,y,\hbar) &:= v(x)^{-1}a(f(x),\sigma_f(x)y,\hbar)v(x)=v(x)^{-1}f^{0*}a(x,y,\hbar)v(x),\\
f_*a(x,y,\hbar) &:= (f^*)^{-1}a=v(f^{-1}(x))a(f^{-1}(x),(\sigma_f(f^{-1}(x)))^{-1}y,\hbar)v(f^{-1}(x))^{-1}\\
&= f_*^0(v(x)a(x,y,\hbar)v(x)^{-1}),\\
f^{0*}a(x,y,\hbar) &:= a(f(x),\sigma_f(x)y,\hbar),\\
f_*^0a(x,y,\hbar) &:= a(f^{-1}(x),(\sigma_f(f^{-1}(x)))^{-1}y,\hbar).
\end{aligned}\tag{97}$$

第1式により $\circ$ 積 (69) は不変である。特に $f=\mathrm{id.}$ のときは $v(x)$ は普通のゲージ変換（随伴表現）で $\sigma_f(x)$ は symplectic 変換（$Sp(n)$ の基本表現）になる。[68]

自己同型写像 (96) は $Uv^{-1}(x)$ を U と再定義することにより

$$\begin{aligned}
&A\ :\ a\mapsto f_*^0(U^{-1}\circ a\circ U),\qquad a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge,\\
&U=\exp_\circ\left(\frac{i}{\hbar}H_2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{i}{\hbar}H_2\right)^k,\ \ H_2\in W_2'(L,\mathcal{A}),
\end{aligned}\tag{98}$$

のように書きかえられる。$W_2'(L,\mathcal{A})$ は $W_3'(L,\mathcal{A})$ と $\hbar\mathcal{A}$ の和とする。とくに $f_*^0=\mathrm{id.}$ となる場合（つまり $f=\mathrm{id}$ で symplectic lifting が自明：$\sigma_f(x)^i{}_j=\delta^i_j$ な場合）この自己同型写像 A を $W(L,\mathcal{A})$ 上の *"gauge transformation"* とよぶことにする。

[64] この H_3 に対する制限は次に定義する U による変換が $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の自己同型を引き起こすように、つまり変換した結果が $\hbar$ の負冪を含まないようにするためのものである。

[65] この写像は $U\mapsto C\circ U=CU,\ C\in Z,\exists C^{-1}$ なる変換のもとで不変であることに注意しよう。

[66] H_3 の次数に対する制限から従う。

[67] f^{0*} は y^i 上には lifting として作用し、その他の係数の $\wedge T^*M$ 部分に対しては普通の pullback として作用するものである。

[68] 後者は重力理論（擬 Riemann 多様体）の場合の局所 Lorenz 変換の類似物である。

自己同型 (98) による Abelian connection D の *image* D' を

$$D'a := AD(A^{-1}a), \tag{99}$$

と定める。この D' も Abelian connection である： $(D')^2a = AD^2(A^{-1}a) = 0$. A の定義域 $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ を $\wedge W_D$ に制限することにより自己同型写像 A は同型写像（同じ記号で表わして） $A : \wedge W_D \to \wedge W_{D'}$ を定めている。実際 $Da = 0$ なら $D'a' = D'(Aa) = A(Da) = 0$ である。この同型は Abelian connection D, D' によって定まる積 $*, *'$ の equivalence を引き起こす。実際これを見るために

$$T : a_0 \mapsto Q^{-1}A^{-1}Q'(a_0) \tag{100}$$

なる T を導入する、つまり

$$\begin{tikzcd}
(W_D, \circ) \arrow[r, "A"] & (W_{D'}, \circ) \\
(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *) \arrow[u, "Q"] & (C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *') \arrow[l, "T"'] \arrow[u, "Q'"']
\end{tikzcd}$$

のような状況を考えると $*$ 積の定義 (92) から[69]

$$a_0 *' b_0 = T^{-1}(Ta_0 * Tb_0), \tag{102}$$

となる。これは $T : (C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *') \to (C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ が同型写像であり、それぞれの積 $*, *'$ の equivalence を表わしている。[70]

2 つの Abelian connection D, D' の間の関係を調べよう。

まず D (82) を

$$\begin{aligned}
Da &= \nabla_L a + \frac{i}{\hbar}[\gamma_T, a], \quad a \in W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge, \\
\gamma_T &:= -i\hbar\Gamma_\mathcal{E} + \omega_{ij}y^i\theta^j + r, \\
\Omega &= \frac{1}{2}R_{ij}y^iy^j + \nabla_L\gamma_T + \frac{i}{\hbar}\gamma_T \circ \gamma_T
\end{aligned} \tag{103}$$

という形に書き換えておく。（D' についても同様。）γ_T は $\Gamma_\mathcal{E}$ と γ を合わせたもので "gauge transformations" U (98) に関するゲージ場である。[71]これにより (99) は

$$\begin{aligned}
\nabla'_L : &= f^0_*\nabla_L f^{0*}, \\
\gamma'_T &= f^0_*\left(U^{-1} \circ \gamma_T \circ U - ihU^{-1} \circ \nabla_L U + \hbar C_\gamma\right)
\end{aligned} \tag{104}$$

69

$$\begin{aligned}
A^{-1}a(x, y, \hbar) &= U \circ f^{0*}a(x, y, \hbar) \circ U^{-1}, \\
A^{-1}(a \circ b) &= (A^{-1}a) \circ (A^{-1}b), \\
T^{-1} &= Q'^{-1}AQ.
\end{aligned} \tag{101}$$

などに注意する。

[70] $*$ 積の equivalence については例えば [17] 参照。

[71] もともと γ は (94) の U に関するゲージ場で $\Gamma_\mathcal{E}$ は $v(x)$ に関するゲージ場である。

と書きかえられる。($C_\gamma \in Z \otimes \wedge^1$ は γ_T の central 1-form の不定性の部分。$\hbar$ がかかっているのは r の次数をあわせるため。)さらに (104) の第2式から

$$\begin{aligned} &DU = U \circ \frac{i}{\hbar}\left(f^{0*}\gamma'_T - \gamma_T - \hbar C_\gamma\right), \\ &f^{0*}\Omega' - \Omega - \hbar dC_\gamma = 0, \\ &f^{0*}\Omega_0 = \Omega_0 \end{aligned} \tag{105}$$

が成り立つ。(第1式は (104) を書き換えただけで、第2式は第1式に D を作用させ $R'_{ij}y^iy^j = f^0_*(R_{ij}y^iy^j)$ を使えば得られ、第3式は第2式の次数零の部分。)

(105) は任意の2つの Abelian connection D, D' が与えられたとき $W_D, W_{D'}$ をつなぐ (98) の形の自己同型 A が存在するための必要条件を与えている。とくに第3式から f は Ω_0 に関する symplectomorphism[72]で、第2式は Ω と $f^{0*}\Omega'$ が同じ cohomology class にあるべしという条件である。(105) の第1式は

$$U = \sigma(U) + \delta^{-1}\left((D+\delta)U - \frac{i}{\hbar}U \circ \left(f^{0*}\gamma'_T - \gamma_T - \hbar C_\gamma\right)\right) \tag{106}$$

のように書き換えることができて、これを漸化式とみることにより[73]与えられた $\sigma(U), f^0_*, \gamma_T, \gamma'_T$ に対して iteration で U が一意的に決まる。

逆に Ω と Ω' が同じ cohomology class に属し、次数零の項が一致すれば (98) で $f = \mathrm{id.}$ とした形の A が存在することが証明されている。[9] これにより、2つの equivalent な $*$ 積あるいは2つの同型な代数 $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ は symplectomorphism と "gauge transformation" で結びついている。

$W(L,\mathcal{A}) \otimes \wedge$ の任意の自己同型 A (98) は2つの Abelian connection に対し、
同型 $A : {}_\wedge W_D \to {}_\wedge W_{D'}$ を与えることをみてきたが、特に A が ${}_\wedge W_D$ の自己同型を与える場合に注目しよう。これは A が

$$Da = ADA^{-1}a, \qquad \forall a \in W(L,\mathcal{A}) \otimes \wedge. \tag{107}$$

を満たす、すなわち A が D を保存する場合である。このとき $*$ 積は不変である、つまり (100)(102) は

$$\begin{aligned} T &= Q^{-1}A^{-1}Q, \\ a_0 * b_0 &= T^{-1}(Ta_0 * Tb_0) \end{aligned} \tag{108}$$

で第2式は $*$ 積の定義から恒等式である。(104) の変数を用いて

$$\begin{aligned} \nabla'_L &= \nabla_L, \\ \gamma'_T &= \gamma_T + \hbar C'_\gamma. \qquad C'_\gamma \in Z \otimes \wedge^1. \end{aligned} \tag{109}$$

[72] symplectic diffeomorphism のこと。
[73] $r, Q(a_0)$ を求めるときと同様に次数がどんどん上がる形になっている。

となる場合、条件 (107) は満たされる。[74] (109) の第 1 式から symplectic lifting σ_f は

$$\Gamma(f(x))^m{}_{lk}(f^{0*}\theta^k) = \Gamma(x)^m{}_{lk}\theta^k - \left((d\sigma_f)\sigma_f^{-1}\right)^m{}_l \tag{110}$$

を満たすことを意味し[75] (109) の第 2 式から (105) は

$$\begin{aligned} DU &= U \circ \frac{i}{\hbar}\left(f^{0*}\gamma_T - \gamma_T + \hbar(f^{0*}C'_\gamma - C_\gamma)\right), \\ \Omega' &= \Omega + \hbar dC_\gamma, \\ f^{0*}\Omega_0 &= \Omega_0. \end{aligned} \tag{111}$$

となる。

さらに上のような D を保つ $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の自己同型 A を "gauge transformations" に制限するとその結果誘導される $\wedge W_D$ の自己同型は以下にみるようにいわゆる *noncommutative gauge transformation* と同一視できる。

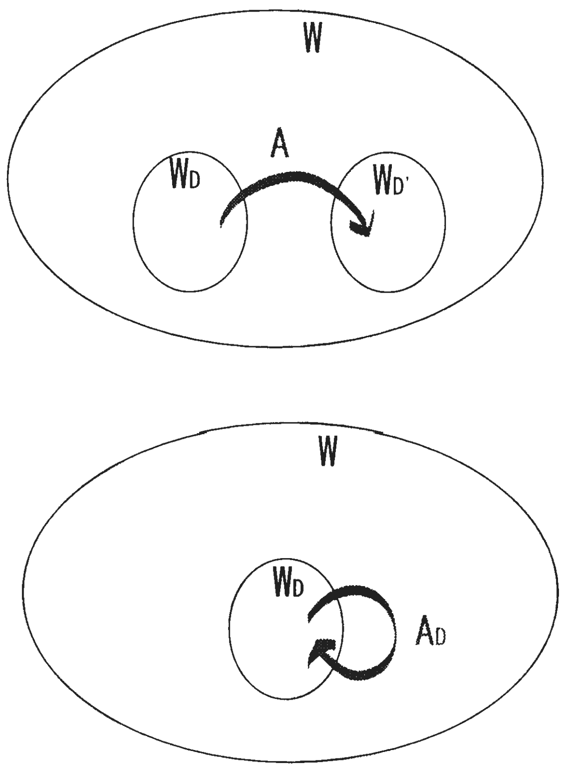


図 1: flat section の間の同型写像と自己同型写像。ともに W の自己同型写像を制限することで得られる。

$W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ 上の "gauge transformation"

$$A : a \mapsto U^{-1}\circ a \circ U. \tag{112}$$

[74] これは一般には (107) のための十分条件ではあるが必要条件ではない。しかし今の目的のためにはこれで十分である。

[75] これは $f^{0*}\nabla_L = \nabla_L f^{0*}$ つまり f とその symplectic lifting が共変微分と可換になる条件式である。

を考えよう。これが特に D を保つためには $f^0_* = \mathrm{id.}$ から (109) の第1式は自明に $\nabla'_L = f^0_* \nabla_L f^{0*} = \nabla_L$ となり第2式が要請される。この場合 (111)(109) より

$$DU = iU(C'_\gamma - C_\gamma) \tag{113}$$

となる。[76]

(113) に D を作用させて $D^2 = 0$ から $d(C'_\gamma - C_\gamma) = 0$ となるので局所的にある $\varphi_\gamma \in Z$ を用いて $C'_\gamma - C_\gamma = d\varphi_\gamma$ と書けるべし、ということが U に要請される。しかし、この φ_γ は局所的には (112) を表す U のかわりに $V := U \exp(-i\varphi_\gamma)$ を用いることで吸収できて (113) と (112) は

$$a \mapsto U^{-1} \circ a \circ U = V^{-1} \circ a \circ V \qquad V \in W_D. \tag{114}$$

となる。逆にこの形の $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ の "gauge transformation" は $\wedge W_D$ の自己同型写像を与える。この (114) は Abelian connection D を保つ "gauge transformation" A (112) は $\wedge W_D$ の自己同型として locally inner であることを示している。

また (114) は W_D と $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ の対応を思い出すと σ を作用させることで

$$a_0 \mapsto V_0^{-1} * a_0 * V_0, \tag{115}$$

となる。ここで $a_0 = \sigma(a), V_0 = \sigma(V)$ とした。これは Moyal 積を用いて書く通常の非可換 Yang-Mills 理論の noncommutative gauge transformation（随伴表現）と同じ形をしているので $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ の *noncommutative gauge transformation*（あるいは非可換ゲージ変換）と呼ぼう。(114) も $\wedge W_D$ の *noncommutative gauge transformation* と呼び、このような D を保つ自己同型写像を A_D と書くことにする。こうして得られた *noncommutative gauge transformation* は $\wedge W_D$ 上では局所的（あるいは fiberwise）な変換であるが $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ 上では普通の Moyal 積と同様に非局所的な変換であることに注意しよう。

5.3 trace

ここでは Fedosov の $*$ 積を用いるときの trace の定義を簡単に紹介する。[8][9]

$\boxed{\text{trace}}$

trace Tr とは W_D^c 上の線形汎関数で $\forall a \in W_D^c$ に対し

$$\mathrm{Tr} a = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^{k-n} c_k, \quad c_k \in \mathbb{C} \tag{116}$$

の形になり

$$\mathrm{Tr} a \circ b = \mathrm{Tr} b \circ a, \quad \forall a \in W_D^c, \forall b \in W_D \tag{117}$$

[76] $D'a = D(U^{-1} \circ a \circ U) = \frac{i}{\hbar}[U \circ DU^{-1}, a] = 0$, $a \in \wedge W_D$ より $U \circ DU^{-1}$ が central 1-form になれということが要請されることからもこの条件は得られる。

を満たすものをいう。ただし W_D^c は W_D のうち M 上コンパクトな support を持つものとする。

これを $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A},*)$ （のコンパクト support） 上の trace とみなすときも同じ記号 Tr を用いることにすると第2式は $*$ 積で書き直して

$$\mathrm{Tr}a_0*b_0=\mathrm{Tr}b_0*a_0,\quad \forall a_0\in(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A})^c,\forall b_0\in C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A} \tag{118}$$

となる。

上の性質を満たす trace を定義するためにまず次の定理が成り立つことに注意しよう：

定理 [9] 代数 W_D は、局所的には自明な代数 $W_{D^0}(\mathbb{R}^{2n})$ と同型である。

ここで自明な代数 $W_{D^0}(\mathbb{R}^{2n})$ とは平坦な $M=\mathbb{R}^{2n}$ 上、自明な Abelian connection D^0 ：

$$D^0=d+\frac{i}{\hbar}[\omega_{ij}y^i dx^j] \tag{119}$$

を入れたときに定義される flat section からなる代数である。[77] この場合 ω_{ij} は定数で $Q(a_0(x))=a_0(x+y)$ になるので $*$ 積は $\circ$ 積で y^i を x^i で置き換えた普通の Moyal 積 $\exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}\omega^{ij}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^j}\right)$ に帰着する。

まず自明な代数 $W_{D^0}(\mathbb{R}^{2n})$ に対する $W_{D^0}^c(\mathbb{R}^{2n})$ 上の trace は

$$\mathrm{Tr}a=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{\omega^n}{n!}\mathrm{tr}\sigma(a) \tag{120}$$

で定義する。ただし tr は行列の trace である。これが上で述べた trace の性質を満たすことはすぐに確かめられる。

一般の W_D^c 上の trace はの定義は局所的にこの自明な代数上の trace で表現しておいて足し合わせる。つまり $a\in W_D^c$ の support の十分細かい被覆 $\{O_i\}$ をとりその上での 1 の分解を $\{\rho_i\}$ とする：

$$\sum_i\rho_i=1 \tag{121}$$

そして上の定理における同型写像を

$$A_i:W_D(O_i)\to W_{D^0}(O),\quad O\subset\mathbb{R}^{2n} \tag{122}$$

とする。このとき a の trace を

$$\mathrm{Tr}a=\sum_i\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{\omega^n}{n!}\mathrm{tr}\sigma(A_i(Q(\rho_i)\circ a)) \tag{123}$$

で定義すると被覆や 1 の分解によらず、上の trace の性質を満たすことが示される。

また $W(L,\mathcal{A})$ の自己同型写像 A から導かれる二つの flat section の間の同型写像 $A:W_D\to W_{D'}$ （$D':=ADA^{-1}$） のもとで W_D^c 上の trace Tr と $W_{D'}^c$ 上の trace Tr$'$ が

$$\mathrm{Tr}'Aa=\mathrm{Tr}a,\quad a\in W_D^c \tag{124}$$

を満たすことも示されており、特に W_D の自己同型写像 A_D に対して trace が不変である：

$$\mathrm{Tr}A_Da=\mathrm{Tr}a,\quad a\in W_D^c. \tag{125}$$

---

[77] ここで $x=0$ の近傍で対応しているとしていて $\theta^i={\theta^i}_\mu(x)dx^\mu$ が ${\theta^i}_\mu(0)=\delta^i_\mu$ を満たしている場合を考えている。

6　非可換ゲージ理論

6.1　エルミート性

今まで一般に $\mathcal{A}$ は複素 $N\times N$ 行列に値をとるとしてきたが行列のエルミート性を課すことができるだろうか？つまり §5.1 で定義した $*$ 積をとった後もエルミート行列で有りうるのだろうか。弦理論で現れる N 枚の重なった D-brane 上に現れるゲージ理論は $U(N)$ なので、それに近い状況にするために $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ をエルミート行列に制限できるかどうか調べる必要がある。そのために §5.1 で構成した $*$ 積をここでは再度詳しく調べて実際エルミート性を課すことができることを示す。

6.1.1　漸化式

§5.1 では $*$ 積を構成するためにまず Abelian connection を定めるための r を求めた。一般に

$$r=\sum_{2k+p\geq 2,k\geq 0,p\geq 0}\hbar^k\frac{1}{p!}r_{k,i_1\cdots i_p,j}y^{i_1}\cdots y^{i_p}\theta^j \tag{126}$$

と展開すると漸化式 (84) は係数の間の漸化式として

$$\begin{aligned}r_{k,i_1\cdots i_p,j} &= r^0_{k,i_1\cdots i_p,j}+\frac{p}{2(p+1)}(\nabla_{(i_1}r_{|k|,i_2\cdots i_p),j}-\nabla_j r_{k,(i_1\cdots i_{p-1},i_p)})\\ &\quad+\sum\frac{i}{m!p_1!p_2!}\frac{p!}{2(p+1)}\frac{\omega^{l_1l'_1}}{2i}\cdots\frac{\omega^{l_ml'_m}}{2i}[r_{k_1,l_1\cdots l_m(n_1\cdots n_{p_1},j'},r_{|k_2,l'_1\cdots l'_m|n'_1\cdots n'_{p_2}),j}\}\end{aligned} \tag{127}$$

ここで右辺最後の項の和は $p=p_1+p_2+1,p_1\geq 0,p_2\geq 0$ に対し集合として
$\{i_1,\cdots,i_p\}=\{n_1,\cdots,n_{p_1},n'_1,\cdots,n'_{p_2},j'\}$ となるものを一つとってきて
$k=k_1+k_2+m-1,m\geq 0,k_1\geq 0,k_2\geq 0,2k_1+p_1+m\geq 2,2k_2+p_2+m\geq 2$ を満たす範囲でとる。$[\,,\,\}$ は m が偶数のとき行列の交換子 $[\,,\,]$ であり、m が奇数のときは行列の反交換子 $\{\,,\,\}$ を意味する。また (127) 右辺第 1 項は iteration(84) の初項
$\delta\mu+\delta^{-1}(\nabla(\omega_{ij}y^i\theta^j)+R-\Omega_1)=:r^0$ の成分を表わす。つまり

$$\nabla(\omega_{ij}y^i\theta^j)=\frac{1}{2}\omega_{im}T^m{}_{jk}y^i\theta^j\wedge\theta^k \tag{128}$$

($T^m{}_{jk}$ は ∇_L に対する捩率テンソル。) に注意すると

$$\begin{aligned}r^0 &= \sum_{2k+p\geq 2,k\geq 0,p\geq 0}\hbar^k\frac{1}{p!}r^0_{k,i_1\cdots i_p,j}y^{i_1}\cdots y^{i_p}\theta^j\\ &= \sum_{2k+p\geq 2,k\geq 0,p\geq 0}\hbar^k\frac{1}{p!}\mu_{k,i_1\cdots i_pj}y^{i_1}\cdots y^{i_p}\theta^j+\frac{1}{3}\omega_{im}T^m{}_{jk}y^iy^j\theta^k\\ &\quad+\frac{1}{8}R_{ijkl}y^iy^jy^k\theta^l-\frac{1}{2}(i\hbar R_{Ekl}+\Omega_{1kl})y^k\theta^l\end{aligned} \tag{129}$$

(127) は r の最低次数 2 の項に対しては

$$r_{k,i_1\cdots i_p,j} = r^0_{k,i_1\cdots i_p,j}, \quad 2k+p=2 \tag{130}$$

となり、次数 $2k+p$ が 3 以上場合 (127) は右辺が $2k+p$ 次より小さい r の項の係数で書けているので次数の小さい順に一意的に r が定まる。

ここで注意すべきことは、(127) の $k=-1$ に対しては右辺の最後の項の和が形式的には残り任意の $i_1,\cdots,i_p, p\geq 5, j$ に対して

$$\sum_{p=p_1+p_2+1, p_1\geq 2, p_2\geq 2} \frac{1}{p_1!}\frac{1}{p_2!}[r_{0,i_1\cdots i_{p_1},i_{p_1+1}}, r_{0,i_{p_2}\cdots i_p,j}] = 0 \tag{131}$$

という関係式が出てくることである。これは (84) をみてもわかるように $\hbar^{-1}$ に比例する項が零になるべしという条件である。そもそも D の定義で $\frac{i}{\hbar}[r, \ ]$ という項があったことを思い出すと、今考えている $\hbar$ の非負の形式的冪級数で閉じた話をするためには $r_{0,i_1\cdots i_p,j}$ が単位行列に比例しなければならない。このとき (131) は自明に満たされる。これは言いかえると (129) から $\mu_{0,i_1\cdots i_p}$ が単位行列に比例すべしという条件になる。これが (127) と矛盾しないことも確かめられる。

$*$ 積を計算するためには r が定まったとき flat section $a = Q(a_0) \in W_D$ を求める必要があったのだが、この形を定める漸化式 (89) は形式的に (90) と表現できた。ここでは (89) に戻って露わに成分に関する漸化式を書き下そう。

$\hbar$ を含まない $a_0 \in C^\infty(M)\otimes\mathcal{A}$ に対し[78]

$$a = Q(a_0) = \sum_{k\geq 0, p\geq 0} \hbar^k \frac{1}{p!} a_{k,i_1\cdots i_p} y^{i_1}\cdots y^{i_p} \tag{132}$$

とおくと (89) から

$$\begin{aligned} a_{k,i_1\cdots i_p} &= a_0\delta^0_k\delta^0_p + \nabla_{(i_1} a_{|k|,i_2\cdots i_p)} \\ &\quad + \sum \frac{i(p-1)!}{m!p_1!p_2!}\frac{\omega^{l_1l'_1}}{2i}\cdots\frac{\omega^{l_ml'_m}}{2i}[r_{k_1,l_1\cdots l_m(n_1\cdots n_{p_1},j}, a_{|k_2,l'_1\cdots l'_m|n'_1\cdots n'_{p_2})}\} \end{aligned} \tag{133}$$

ここで右辺最後の項の和は $p=p_1+p_2+1, p_1\geq 0, p_2\geq 0$ に対し集合として
$\{i_1,\cdots,i_p\} = \{n_1,\cdots,n_{p_1},n'_1,\cdots,n'_{p_2},j\}$ となるものを一つとってきて
$k=k_1+k_2+m-1, m\geq 0, k_1\geq 0, k_2\geq 0, 2k_1+p_1+m\geq 2$ を満たす範囲でとる。$[\ ,\ \}$ は (127) と同様に m が偶数のとき行列の交換子 $[\ ,\ ]$ であり、m が奇数のときは行列の反交換子 $\{\ ,\ \}$ を意味する。

[78] $\hbar$ を含む場合は $\hbar$ の冪で展開して線形に Q を作用させればよい。

6.1.2 エルミート性

普通の意味のエルミート性と矛盾しないための条件を求めよう。これは言いかえると $U(N)$ ゲージ理論の非可換版を Fedosov の $*$ 積の場合に作れるかという問題である。正確には

$$(a_0 * b_0)^\dagger = b_0^\dagger * a_0^\dagger \quad (a_0, b_0 \in C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}) \tag{134}$$

を満たす条件を求めるということである。$\dagger$ は普通の意味の行列のエルミート共役で $\hbar^\dagger = \hbar$ を要請すると $y^i, \omega^{ij} \in \mathbb{R}$ より

$$(a \circ b)^\dagger = \left(a \exp\left(-\frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^i} \omega^{ij} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^j} \right) b \right)^\dagger = b^\dagger \circ a^\dagger \quad (a, b \in W(L, \mathcal{A})) \tag{135}$$

なので (134) のためには $*$ 積の定義 (92) より

$$(Q(a_0))^\dagger = Q(a_0^\dagger) \tag{136}$$

を満たせばよい。これは $\mathcal{A}$ が $U(N)$ bundle つまり $(\Gamma_\varepsilon)^\dagger = -\Gamma_\varepsilon$ という要請のもとで Q および r を求める漸化式 (133)(127) より

$$(r_{k,i_1 \cdots i_p,j})^\dagger = r_{k,i_1 \cdots i_p,j} \tag{137}$$

という条件になる。(127)(129) から結局

$$(\mu_{k,i_1 \cdots i_p})^\dagger = \mu_{k,i_1 \cdots i_p}, \quad (\Omega_{1kl})^\dagger = \Omega_{1kl} \tag{138}$$

という条件に帰着する。

まとめると $*$ 積のもとでエルミート性 (134) が保存される条件は $\mathcal{A}$ が $U(N)$ bundle（これは $\hbar \to 0$ で $U(N)$ ゲージ理論に帰着するための必要条件）で $\hbar, \mu, \Omega_1$ がエルミートであるべしということになる。

6.1.3 低次の項

ここでは§6.1.1 の漸化式を次数の低い部分について具体的に解いた式を書き下しておく。$\hbar$ が十分小さいと思ったときに $\hbar$ による非可換な補正項を求めたいときに有用になる。

まず r の成分について低次の項をあらわに書き下すと

$$
\begin{aligned}
r_{k,i} &= \mu_{k,i}, \quad (k \geq 1) \\
r_{0,ij,k} &= \mu_{0,ijk} + \frac{2}{3}\omega_{(i|m|}T^m{}_{j)k}, \\
r_{1,i,j} &= \mu_{1,ij} - \frac{1}{2}(iR_{Eij} + \Omega_{1,1,ij}) + \frac{1}{2}\nabla_{[i}\mu_{|1|,j]} + \frac{i}{2}\mu_{1,[i}\mu_{|1|,j]}, \\
r_{0,ijk,l} &= \frac{3}{4}R_{(ijk)l} + \mu_{0,ijkl} \\
&+\frac{3}{8}\Bigg(\nabla_{(i}\mu_{|0|,jk)l} - \nabla_l\mu_{0,ijk} - \frac{2}{3}\omega_{m(j}\nabla_i T^m{}_{k)l} + 2\omega^{l'l''}\mu_{0,l'(ij}\mu_{|0|,k)l''l} \\
&+\frac{2}{3}\mu_{0,l'(ij}T^{l'}{}_{k)l} - \frac{2}{3}\omega^{l'l''}\omega_{m(i}T^m{}_{|l'|j}\mu_{|0|,k)l''l} + \frac{2}{3}\omega^{l'l''}\mu_{0,l'(ij}\omega_{k)m}T^m{}_{l''l} \\
&-\frac{2}{9}\omega_{m(i}T^m{}_{|l'|j}T^{l'}{}_{k)l} - \frac{2}{9}\omega^{l'l''}\omega_{m(i}T^m{}_{|l'|j}\omega_{k)m'}T^{m'}{}_{l''l}\Bigg), \\
r_{2,i,j} &= \mu_{2,ij} - \frac{1}{2}\Omega_{1,2,ij} + \frac{1}{2}\nabla_{[i}\mu_{|2|,j]} + \frac{i}{2}[\mu_{2,[i}, \mu_{|1|,j]}] \\
&+\frac{\omega^{ll'}}{8}\{\mu_{1,li} - \frac{1}{2}(iR_{Eli} + \Omega_{1,1,li}) + \frac{1}{2}\nabla_{[l}\mu_{|1|,i]} + \frac{i}{2}\mu_{1,[l}\mu_{|1|,i]}, \\
&\mu_{1,l',j} - \frac{1}{2}(iR_{El'j} + \Omega_{1,1,l'j}) + \frac{1}{2}\nabla_{[l'}\mu_{|1|,j} + \frac{i}{2}\mu_{1,[l'}\mu_{|1|,j]}\}, \\
r_{1,ij,k} &= \mu_{1,ijk} + \frac{1}{3}(\nabla_{(i}\mu_{|1|j)k} - \nabla_k\mu_{1,ij}) - \frac{1}{6}(i\nabla_{(i}R_{Ej)k} + \nabla_{(i}\Omega_{1,|1|,j)k}) \\
&+\frac{1}{12}(\nabla_{(i}\nabla_{j)}\mu_{1,k} - \nabla_{(i}\nabla_{|k|}\mu_{|1|,j)}) + \frac{i}{12}[\nabla_{(i}\mu_{|1|,j)}, \mu_{1,k}] \\
&+\frac{i}{6}[\mu_{1,(j}, \nabla_{i)}\mu_{1,k}] + \frac{i}{3}\left([\mu_{1,ij}, \mu_{1,k}] + [\mu_{1,(i}, \mu_{|1|,j)k}]\right) \\
&-\frac{i}{6}[\mu_{1,(i}, iR_{Ej)k} + \Omega_{1,|1|,j)k}] - \frac{i}{12}[\mu_{1,(i}, \nabla_{|k|}\mu_{|1|,j)}] - \frac{1}{12}[\mu_{1,(i}, [\mu_{|1|,j)}, \mu_{1,k}]] \\
&+\frac{1}{3}\left(\mu_{1,l(i} - \frac{1}{2}(iR_{El(i} + \Omega_{1,1,l(i)}) + \frac{1}{4}(\nabla_l\mu_{1,(i} - \nabla_{(i}\mu_{|1,l|} + i[\mu_{1,l}, \mu_{1,(i}])\right) \\
&\cdot\left(\omega_{ll'}\mu_{|0,l'|j)k} + \frac{1}{3}T^l{}_{j)k} + \frac{1}{3}\omega^{ll'}\omega_{j)m}T^m{}_{l'k}\right) \\
&+\frac{\omega^{ll'}}{3}\left(\mu_{0,lij} + \frac{1}{3}\omega_{m(i}T^m{}_{j)l}\right) \\
&\cdot\left(\mu_{1,l'k} - \frac{1}{2}(iR_{El'k} + \Omega_{1,1,l'k}) + \frac{1}{2}(\nabla_{[l'}\mu_{|1|,k]} + i\mu_{1,[l'}\mu_{|1|,k]}\right)
\end{aligned}
\tag{139}
$$

となる。ここで

$$
\Omega_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\hbar^k\frac{1}{2}\Omega_{1,k,ij}\theta^i \wedge \theta^j \tag{140}
$$

とした。特に $r_{0,ijk,l}$ で M の曲率 $R_{ijkl} = \omega_{im}R^m{}_{jkl}$ 依存性が現れていることがわかる。

このように一般に r は複雑なパラメータ依存性を持つ項が無限に続く。[79]
$a=Q(a_0)$ の成分についても 3 次の係数まで書き下すと

$$
\begin{aligned}
a_k &= a_0\delta^0_k, \\
a_{0,i} &= \nabla_i a_0 + i[\mu_{1.i}, a_0], \\
a_{0,ij} &= \nabla_{(i}\nabla_{j)}a_0 + 2i[\mu_{1.(i}, \nabla_{j)}a_0] + 2\omega^{ll'}\mu_{0,lij}\nabla_{l'}a_0 + i[\nabla_{(i}\mu_{|1|,j)} + \mu_{1.ij}, a_0] \\
&\quad -[\mu_{1.(i}, [\mu_{|1|,j)}, a_0]] + \frac{i}{2}\omega^{ll'}\{\mu_{0.lij}, [\mu_{1,l'}, a_0]\}, \\
a_{1,i} &= i[\mu_{2,i}, a_0] \\
&\quad +\frac{\omega^{ll'}}{2}\{\mu_{1,li} - \frac{1}{2}(iR_{Eli} + \Omega_{1.1,li} + \nabla_{[l}\mu_{|1|,i]} + i\mu_{1,[l}\mu_{|1|,i]}, \nabla_{l'}a_0 + i[\mu_{1,l'}, a_0]\}, \\
a_{0,ijk} &= \nabla_{(i}\nabla_j\nabla_{k)}a_0 + 2i[\nabla_{(i}\mu_{|1|,j}, \nabla_{k)}a_0] + 2i[\mu_{1,(j}, \nabla_i\nabla_{k)}a_0] \\
&\quad +i[\nabla_{(i}\nabla_j\mu_{|1|,k)} + \mu_{(i}\mu_{|1|,jk}, a_0] + i[\nabla_{(j}\mu_{|1|.k} + \mu_{1,(jk}, \nabla_{i)}a_0] \\
&\quad -[\nabla_{(i}\mu_{|1|,j}, [\mu_{|1|,k)}, a_0]] - [\mu_{1,(j}, [\nabla_i\mu_{|1|k)}, a_0]] - [\mu_{1,(j}, [\mu_{|1|,k}, \nabla_{i)}a_0]] \\
&\quad +i\omega^{ll'}\left(\nabla_{(i}\mu_{|0,l|jk)}[\mu_{1.l'}, a_0] + \mu_{0,l(jk}[\nabla_{i)}\mu_{1,l'}, a_0] + \mu_{0,l(jk}[\mu_{|1,l'|}, \nabla_{i)}a_0]\right) \\
&\quad +i[\mu_{1,(i}, \ \nabla_j\nabla_{k)}a_0 + 2i[\mu_{|1|,j}, \nabla_{k)}a_0] + \omega^{ll'}\mu_{|0,l|jk)}\nabla_{l'}a_0 \\
&\quad +i[\nabla_j\mu_{|1|,k)} + \mu_{|1|,jk)}, a_0] - [\mu_{|1|,j}, [\mu_{|1|,k)}, a_0]] + i\omega^{ll'}\mu_{|0,l|jk)}[\mu_{1,l'}, a_0]] \\
&\quad +2i[\mu_{1.(ij}, \nabla_{k)}a_0 + i[\mu_{|1|k)}, a_0]] + i[\mu_{1,ijk}, a_0] \\
&\quad +2\omega^{ll'}\left(\mu_{0,l(ij} + \frac{1}{3}\omega_{m(i}T^m{}_{j|l|}\right)\Bigg(\frac{1}{2}\nabla_{|l'|}\nabla_{k)}a_0 + \frac{1}{2}\nabla_{k)}\nabla_{l'}a_0 \\
&\quad +i[\mu_{|1,l'|}, \nabla_{k)}a_0] + i[\mu_{|1|,k)}, \nabla_{l'}a_0] + 2\omega^{l'l''}\mu_{|0|,k)ll'}\nabla_{l''}a_0 \\
&\quad +i[\frac{1}{2}\nabla_{|l'}\mu_{1|,k)} + \frac{1}{2}\nabla_{k)}\mu_{1,l'} + \mu_{|1|,k)l'}, a_0] \\
&\quad -\frac{1}{2}\left([\mu_{|1,l'}, [\mu_{1|,k)}, a_0]] + [\mu_{|1|,k)}, [\mu_{1,l'}, a_0]]\right) + i\omega^{l_1l_2}\mu_{|0|,k)l'l_1}[\mu_{1,l_2}, a_0]\Bigg) \\
&\quad +\omega^{ll'}(\nabla_{l'}a_0 + i[\mu_{1.l'}, a_0])\Bigg(-\frac{1}{4}R_{(ijk)l} + \mu_{0,lijk} \\
&\quad +\frac{1}{12}\left(\omega_{m(j}\nabla_i T^m{}_{k)l} - \mu_{0.m(ij}T^m{}_{k)l}\right) + \frac{1}{36}\omega_{m(i}T^m{}_{|m'|j}T^{m'}{}_{k)l} \\
&\quad +\frac{\omega^{l_1l_2}}{36}\left(\mu_{0.l_1j(l}\omega_{i)m}T^m{}_{l_2k} + \mu_{0,l_1j(l}\omega_{k)m}T^m{}_{l_2i} - \mu_{0.l_1k(i}\omega_{j)m}T^m{}_{l_2l} - \mu_{0.l_1i(j}\omega_{k)m}T^m{}_{l_2l}\right)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{141}
$$

[79] $L=TM$ で ∇_L の捩率が零の場合は若干式が簡単になることがわかる。$\mu=0$ にとると更に簡単化される。それでも曲率 R 依存性のためさらに高次の項は複雑になる。

のようになる。従って * 積は (92) より

$$
\begin{aligned}
a_0 * b_0 &= \sum_{m\geq 0, k\geq 0, k'\geq 0} \frac{1}{m!}\hbar^{m+k+k'}\frac{\omega^{i_1 i'_1}}{2i}\cdots\frac{\omega^{i_m i'_m}}{2i} a_{k,i_1\cdots i_m} b_{k',i'_1\cdots i'_m} \\
&= a_0 b_0 - \frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}(\nabla_i a_0 + i[\mu_{1,i}, a_0])(\nabla_j b_0 + i[\mu_{1,j}, b_0]) \\
&+\hbar^2\Bigg(-\frac{1}{8}\omega^{ij}\omega^{kl}\nabla_{(i}\nabla_{k)}a_0\nabla_{(j}\nabla_{l)}b_0 + \frac{i}{2}\omega^{ii'}\Bigg(i[\mu_{2,i}, a_0] \\
&+\frac{\omega^{ll'}}{2}\{\mu_{1,li} - \frac{1}{2}(iR_{Eli} + \Omega_{1,1,li} + \nabla_{[l}\mu_{|1|,i]} + i\mu_{1,[l}\mu_{|1|,i]}, \nabla_{l'}a_0 + i[\mu_{1,l'}, a_0]\}\Bigg)(\nabla_{i'}b_0 + i[\mu_{1,i'}, b_0]) \\
&+\frac{i}{2}\omega^{ii'}(\nabla_i a_0 + i[\mu_{1,i}, a_0])\Bigg(i[\mu_{2,i'}, b_0] \\
&+\frac{\omega^{ll'}}{2}\{\mu_{1,li'} - \frac{1}{2}(iR_{Eli'} + \Omega_{1,1,li'} + \nabla_{[l}\mu_{|1|,i']} + i\mu_{1,[l}\mu_{|1|,i']}, \nabla_{l'}b_0 + i[\mu_{1,l'}, b_0]\}\Bigg)\Bigg) \\
&+\mathcal{O}(\hbar^3)
\end{aligned}
\tag{142}
$$

特に a_0, b_0 が単位行列に比例しているとき

$$
\begin{aligned}
a_0 * b_0 &= a_0 b_0 - \frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\partial_i a_0 \partial_j b_0 + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
&= a_0 b_0 + \frac{i\hbar}{2}[a_0, b_0]_{\mathrm{P.b.}} + \mathcal{O}(\hbar^2)
\end{aligned}
\tag{143}
$$

となり、変形量子化の初項の条件 (55) を満たしている。ここで Poisson 括弧 $[\ ,\ ]_{\mathrm{P.b.}}$ を

$$
[f, g]_{\mathrm{P.b.}} := -\omega^{ij}\partial_i f \partial_j g \tag{144}
$$

で定義した。[80]

特に M の曲率 R_{ijkl} 依存性に注目すると * 積は

$$
\begin{aligned}
a_0 * b_0 &= a_0 b_0 - \frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\nabla_i a_0 \nabla_j b_0 - \frac{\hbar^2}{8}\omega^{ij}\omega^{kl}\nabla_{(i}\nabla_{k)}a_0\nabla_{(j}\nabla_{l)}b_0 \\
&-\frac{i\hbar^3}{48}\Bigg(\omega^{ii'}\omega^{jj'}\omega^{kk'}\nabla_{(i}\nabla_j\nabla_{k)}a_0\nabla_{(i'}\nabla_{j'}\nabla_{k')}b_0 \\
&-\frac{1}{4}\omega^{ii'}\omega^{jj'}\omega^{kk'}\omega^{ll'}\left(R_{ijkl}\nabla_{l'}a_0\nabla_{(i'}\nabla_{j'}\nabla_{k')}b_0 + \nabla_{(i}\nabla_j\nabla_{k)}a_0 R_{i'j'k'l}\nabla_{l'}b_0\right) \\
&+\frac{1}{16}\omega^{ii'}\omega^{jj'}\omega^{kk'}\omega^{ll'}\omega^{mm'}R_{(ijk)l}R_{(i'j'k')m}\nabla_l a_0 \nabla_{m'}b_0\Bigg) \\
&+\mathcal{O}(\hbar^4, \mu, R_E, \Omega_1, T)
\end{aligned}
\tag{145}
$$

と表され $\mathcal{O}(\hbar^3)$ から M の曲率依存性が効いてくることがわかる。

[80]負号がついているのは今のセットアップでは M の Poisson 構造を $\Omega_0 = -\frac{1}{2}\omega_{ij}\theta^i \wedge \theta^j$ で定義しているからである。

6.2 非可換ゲージ理論

§5.2 では $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の "gauge transformation" の特別な場合として $\wedge W_D$ の locally inner となる noncommutative gauge transformations（非可換ゲージ変換）を定義した。この節では対応するゲージ場を導入して、非可換時空上のゲージ理論を構築を目指す。これは [3] など多くの文献で調べられている $\mathbb{R}^{2n}$ 上の Moyal 積の場合の非可換ゲージ理論の自然な一般化の一つである。

6.2.1 Weyl 代数束上のゲージ場

まず Weyl 代数束 $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ 上の "gauge transformations" (112) に対するゲージ場 $\hat{A}$ を導入しよう。

§5.1 では $*$ 積を定義するために特に (82) の形の Abeliban connection D に注目してきたが、ここでは Abelian connection に制限せず (76) の形の Weyl 代数束 $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の接続全体を考えよう。また §5.2 では Wey 代数束の対称性である自己同型写像 A (98) を考えたが、ここではそのうち fiberwise な "gauge transformation" (112) に注目する。[81] この場合 ∇_L は固定されるので、D を (103) と書いたときの γ_T を物理的変数とみなすことにする。

convention として一般の（Abelian とは限らない）connection を $\mathcal{D}$ と書くことにし、共変微分 $\mathcal{D}:W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^p\to W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^{p+1}$ に付随するゲージ場を $\hat{A}$ と書く：[82]

$$\mathcal{D}a=\nabla_L a-i[\hat{A},a]\ . \tag{146}$$

この $\mathcal{D}$ を 2 回作用させると

$$\mathcal{D}^2 a=-i[\hat{F}_A,a],\quad \forall a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge, \tag{147}$$

となる。ここで $\hat{F}_A$ はゲージ場 $\hat{A}$ に対する "field strength" で

$$\hat{F}_A=\nabla_L\hat{A}-i\hat{A}\circ\hat{A}-\frac{1}{2\hbar}R_{ij}y^iy^j \tag{148}$$

である。"gauge transformation" A (112) のもとで $\mathcal{D}$ はその image $\mathcal{D}'$ に写される：

$$\mathcal{D}'a:=A\mathcal{D}A^{-1}a,\quad \forall a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge, \tag{149}$$

これより $\hat{A}$ が

$$\hat{A}'=U^{-1}\circ\hat{A}\circ U+iU^{-1}\circ\nabla_L U+C_A \tag{150}$$

---

[81] つまり f_*^0 による自己同型は考えないということである。前述のように f_*^0 は重力理論に対応するもので、通常の非可換 Yang-Mills 理論の一般化の目的には必要ないと考える。

[82] 以前の記号で $\mathcal{D}$ は D に、$\hat{A}$ は $-\frac{1}{\hbar}\gamma_T$ にそれぞれ対応するものである。また以下の計算では前節ですでに計算したものもあるが、今の convention で書き直しておく。

のように変換されることがわかる。ここで $C_A \in Z \otimes \wedge^1$ は $\hat{A}$ の定義の不定性からくるものである。ただし、以下では $dC_A = 0$ という条件を課しておく。これは field strength が

$$\hat{F}'_A = U^{-1} \circ \hat{F}_A \circ U. \tag{151}$$

という普通の共変な形で変換されるようにするためである。

上で特に $\hat{F}_A \in Z \otimes \wedge^2$ となる場合に§5.1.3の Abelian connection に帰着し $\hat{F}_A$ は $-\frac{1}{\hbar}\Omega$ に対応する。

6.2.2 非可換ゲージ場

Abelian connection D を一つ固定したときそれに対応する flat section $\wedge W_D$ の locally inner な自己同型 A_D を noncommutative gauge transformation（非可換ゲージ変換）と同一視した。(§5.2) ここでは、このゲージ変換に対応するゲージ場[83]を導入し対応するゲージ理論を考えよう。非可換ゲージ変換 A_D は "gauge transformation" A の一部なので§6.2.1のゲージ場 $\hat{A}$ を適当に制限することにより $\wedge W_D$ 上の非可換ゲージ場を導入する。

まず (146) は $\hat{A} \to \hat{A}_\gamma - \frac{\gamma_T}{\hbar}$ の置き換えをすることにより

$$\begin{aligned} \mathcal{D}a &= Da - i[\hat{A}_\gamma, a], \quad a \in W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge, \\ \hat{A}_\gamma &:= \hat{A} + \frac{\gamma_T}{\hbar} \end{aligned} \tag{152}$$

となることに注意する。つまり $\mathcal{D}$ に付随するゲージ場 $\hat{A}$ を「背景」γ_T とそのまわりの揺らぎ $\hat{A}_\gamma$ に分けた。ここで D は以下で一つ固定する Abelian connection であり γ_T により決まるものである。[84]背景 D は一般に "gauge transformation" A で変わるが非可換ゲージ変換 A_D では保存される。

U で定まる "gauge transformation" (112) のもとで (104)(150) より $\hat{A}_\gamma$ は

$$\hat{A}'_{\gamma'} = U^{-1} \circ \hat{A}_\gamma \circ U + C, \quad C = C_A + C_\gamma, \ dC = 0. \tag{153}$$

のように変換する。

以上の描像のもと $\wedge W_D$ を非可換空間上の場の空間とみなそう。[85][86] Weyl代数束 $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ から場の空間 $\wedge W_D$ に制限したとき、その元 a に対し $\mathcal{D}$ は $Da = 0$ より

$$\mathcal{D}a = -i[\hat{A}_\gamma, a], \quad a \in \wedge W_D, \tag{154}$$

のように作用する。しかし $a \in \wedge W_D$ に対し $\mathcal{D}a$ は $\wedge W_D$ に入るとは限らない、つまり $\mathcal{D}$ は必ずしも $\wedge W_D$ の graded derivation にはなっていない。従って逆に $\mathcal{D}$ が $\wedge W_D$ 上で graded derivation になるように制限した $\hat{A}_\gamma$ を非可換ゲージ場とみなしたい。

[83]非可換ゲージ場 (noncommutative gauge field) と呼ぶことにする。

[84]∇, μ, Ω により γ_T （あるいは D したがって $\wedge W_D$ が決まる (§5.1.3) ので、これを「背景」とみなす。

[85]これは定数B場の入った弦理論の背景で N 枚の重なった D-brane 上の非可換 Yang-Mills 理論の記述で、普通の Moyal 積の入った $C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \otimes \mathcal{A}$ を Higgs 場の空間とみなすことの一般化である。

[86]すぐあとでみるように p-form$(p \geq 1)$ の場に対しては $\wedge^p W_D$ をさらに制限したものを改めて場の空間とみなすことになる。

§5.1 では W_D と $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ には 1 対 1 対応があることをみたが $\wedge^p W_D$, $p\geq 1$ の対応物については触れなかった。$\circ$ 積は $\wedge^p W_D$, $p\geq 1$ 上にも定義されているが $*$ 積は 0-form である $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ の上でだけ定義した。ところが y^i を含まない非可換な空間での微分形式 p-form$(p\geq 1)$ は定義していない。[87] (そもそもこのように 0-form だけ特別な対応があったのは δ,δ^{-1} の関係式 (80) で a_{00} が現れていたことに起因している。)

y^i を含まない非可換な空間でゲージ理論を作りたいので微分形式およびそれらの積を定義する必要があるが、以下では最も素朴にある固定した微分形式の基底に関して成分ごとに 0-form $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ の上に定義された $*$ 積をとることにする。もちろんこのように定義する数学的な必然性はないし、むしろ非可換幾何学の一般論の universal differential algebra 的にでも構成すべきなのだろうが、このように成分ごとに考えるのは普通の Moyal 積での非可換 Yang-Mills 理論と矛盾しない。つまり、$M=\mathbb{R}^{2n}$ で $*$ 積が Moyal 積になる場合、普通物理でよく議論されているものと一致する定義になっている。

6.3 非可換ゲージ理論の構成

まず、前述のように $\hbar$ で変形された非可換空間 $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A},*)$ の上に「微分形式」を定義しよう。

$\wedge^1 W_D$ の基底として closed 1-forms $\tilde\theta^I\in Z\otimes\wedge^1$, $(I=1,\cdots,2n)$ をとる。これは $\hbar$ の任意の冪を含みうることに注意しよう。この固定した基底 $\tilde\theta^I$ に対し、p-form の場の空間を $\wedge^p W_D$ の部分代数 $W_D\otimes\tilde\wedge^p$:

$$\begin{aligned}
&W_D\otimes\tilde\wedge^p\\
=\ &\{a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^p \mid a=\frac{1}{p!}\tilde\theta^{I_1}\wedge\cdots\wedge\tilde\theta^{I_p}Q(a_{I_1\cdots I_p}),\quad a_{I_1\cdots I_p}\in C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\}\\
\subset\ &\wedge^p W_D,
\end{aligned}\tag{155}$$

と定義する。(ここで $a_{I_1\cdots I_p}$ の添え字は反対称である。) つまり、固定した基底の係数 $Q(a_{I_1\cdots I_p})$ は W_D の元である。この $W_D\otimes\tilde\wedge^p$ に σ を作用させてできたものを $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A},*)$ の p-form の空間と定義し $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde\wedge^p,*)$ と表す。これは $p=0$ のときにの 1 対 1 対応の直接の拡張になっていて、$(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde\wedge^p,*)$ の元から $W_D\otimes\tilde\wedge^p$ の元を得るためには固定した基底 $\tilde\theta$ の係数を Q で持ち上げればよい。また $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A},*)$ 上の p-form a と q-form b の wedge 積は

$$\begin{aligned}
a\wedge b\ &:=\ \left(\frac{1}{p!}\tilde\theta^{I_1}\wedge\cdots\wedge\tilde\theta^{I_p}\right)\wedge\left(\frac{1}{q!}\tilde\theta^{J_1}\wedge\cdots\wedge\tilde\theta^{J_q}\right)\sigma\left(Q(a_{I_1\cdots I_p})\circ Q(b_{J_1\cdots J_q})\right)\\
&=\ \left(\frac{1}{p!}\tilde\theta^{I_1}\wedge\cdots\wedge\tilde\theta^{I_p}\right)\wedge\left(\frac{1}{q!}\tilde\theta^{J_1}\wedge\cdots\wedge\tilde\theta^{J_q}\right)a_{I_1\cdots I_p}*b_{J_1\cdots J_q},
\end{aligned}\tag{156}$$

とする。つまり、単に固定した基底は普通の (可換なときの) $\wedge$ 積をとり、基底の係数の間は $*$ 積をとる。こうして得られた代数 $W_D\otimes\tilde\wedge$ あるいは $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde\wedge,*)$ を場の空間と

[87] [8],[9] でも定義されていない。

みなす。ただし今固定した基底 $\tilde{\theta}^I$ は $\hbar$ を含み得るので、形式的には基底の部分は普通の可換な関数環上の微分形式と同じに見えても、$\hbar$ で変形されていることに注意しよう。係数の部分だけでなく基底の部分も base manifold M の $\hbar$ 変形の一部を成しているのである。

以下では $\wedge W_D$ をさらに制限した $W_D \otimes \tilde{\wedge}$ を場の空間とみなす。基底 $\tilde{\theta}^I$ のもとで

$$\mathcal{D} = \tilde{\theta}^I \mathcal{D}_I, \quad \mathcal{D}_I a = -i[\hat{A}_{\gamma I}, a], \quad a \in W_D \otimes \tilde{\wedge}. \tag{157}$$

と書けることに注意すると、$\mathcal{D}$ が $W_D \otimes \tilde{\wedge}$ の derivation になるという条件（つまり $\mathcal{D}(W_D \otimes \tilde{\wedge}) \subset W_D \otimes \tilde{\wedge}$）は $\mathcal{D}_I$ が W_D の derivation のになるという条件（つまり $\mathcal{D}_I W_D \subset W_D$）と同等である。[88] §B.1 より $\mathcal{D}_I$ が W_D の derivation になるという条件は

$$D(\hbar \hat{A}_{\gamma I}) = \Theta_I \in C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \wedge^1. \tag{158}$$

をみたすような Θ_I が存在するということになる。(158) に D を作用させると D が Abelian connection であることから零になり、右辺の条件は $d\Theta_I = 0$ になり、局所的に $\Theta_I = d\Phi_I$ なる $\Phi_I \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ が存在する。したがって (158) より

$$\begin{aligned} \hbar \hat{A}_{\gamma I} &= Q(\hbar \hat{A}_{\gamma 0 I} - \Phi_I) + \Phi_I, \\ \hat{A}_{\gamma 0 I} &:= \sigma(\hat{A}_{\gamma I}) = \sigma(\hat{A}_I) + \frac{1}{\hbar}\sigma(\gamma_{TI}), \end{aligned} \tag{159}$$

となり、これは $\mathcal{D}_I$ が locally inner derivation であることを意味する：

$$\mathcal{D}_I a = \frac{i}{\hbar}[Q(\Phi_I - \hbar \hat{A}_{\gamma 0 I}), a], \quad a \in W_D \otimes \tilde{\wedge}. \tag{160}$$

以上の条件より、もともと y^i の係数場として非常に多くの自由度を含んでいた $\hat{A}_{\gamma I}$ は Φ_I と $\hat{A}_{\gamma 0 I}$ の自由度に制限されたことになる。あとで Φ_I の部分は固定した基底 $\tilde{\theta}^I$ と背景 γ_T により標準的に決めるものであり、$\hat{A}_{\gamma 0} = \tilde{\theta}^I \hat{A}_{\gamma 0 I}$ をその背景における非可換ゲージ場と同一視する。

σ を作用させることにより (160) は $a_0 = \sigma(a) \in C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \otimes \tilde{\wedge}$ を用いて

$$\mathcal{D}_* a_0 = \tilde{\theta}^I \mathcal{D}_{*I} a_0 := \tilde{\theta}^I \sigma(\mathcal{D}_I Q(a_0)) = \tilde{\theta}^I \left(\frac{i}{\hbar}[\Phi_I, a_0]_* - i[\hat{A}_{\gamma 0 I}, a_0]_* \right), \tag{161}$$

と書け、$\mathcal{D}_*$ は $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \otimes \tilde{\wedge}, *)$ の graded derivation になっている。また $\mathcal{D}$ を 2 回作用させると[89]

$$\mathcal{D}^2 a = -\frac{i}{2}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J \left[-i \left[Q\left(\frac{\Phi_I}{\hbar} - \hat{A}_{\gamma 0 I} \right), Q\left(\frac{\Phi_J}{\hbar} - \hat{A}_{\gamma 0 J} \right) \right], a \right], \tag{162}$$

---

[88] 一般に $D\mathcal{D}a = -i[D\hat{A}_\gamma, a]$, $a \in \wedge W_D$ なので $\mathcal{D}$ が $\wedge W_D$ の dearivation になるという条件は $D\hat{A}_\gamma \in Z \otimes \wedge^2$ になる。ここでは場の空間を $\wedge W_D$ より小さくしたので $\hat{A}_\gamma$ により強い条件を課している。

[89] この式は $W_D \otimes \tilde{\wedge}^p$ 上だけでなく $\forall a \in W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ に対して成り立つ式である。

となり

$$\hat{F}_\gamma = \frac{1}{2}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J \hat{F}_{\gamma IJ} := -\frac{i}{2}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J \left[Q\left(\frac{\Phi_I}{\hbar} - \hat{A}_{\gamma 0I}\right), Q\left(\frac{\Phi_J}{\hbar} - \hat{A}_{\gamma 0J}\right)\right] \tag{163}$$

が $\hat{A}_\gamma$ の field strength である。$\hat{F}_\gamma$ は $\hat{F}_A$ (148)

$$\hat{F}_A = \hat{F}_\gamma - \frac{1}{\hbar}\Omega - \frac{1}{\hbar}\tilde{\theta}^I \wedge \Theta_I. \tag{164}$$

という関係にある。$\hat{F}_A$ は Weyl 代数束 $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ 上のゲージ場 $\hat{A}$ の field strength なので「背景」に依存しないという普遍的な意味を持つが、一方ここで出てきた $\hat{F}_\gamma$ は背景 D に依存することに注意しよう。ただし (164) よりその差は central 2 form 分だけである。
σ を作用させることにより (162)(163) から $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \otimes \tilde{\wedge}, *)$ 上の同様の表式を得る:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 a_0 &= -\frac{i}{2}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J [\hat{F}_{\gamma * IJ}, a_0]_* \\ \hat{F}_{\gamma *} &:= \frac{1}{2}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J \hat{F}_{\gamma * IJ} = \frac{1}{2}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J \sigma \hat{F}_{\gamma IJ} \\ &= -\frac{i}{2}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J \left[\frac{\Phi_I}{\hbar} - \hat{A}_{\gamma 0I}, \frac{\Phi_J}{\hbar} - \hat{A}_{\gamma 0J}\right]_* . \end{aligned} \tag{165}$$

次に $\tilde{\theta}, \Theta_I (= d\Phi_I)$ に注目しよう。上の議論からは closed central 1-form ということしか決めていなかった。これを以下のように標準的に選ぶことにする：

$$\frac{i}{\hbar}[Q(\tilde{\phi}^I), Q(\tilde{\phi}^J)] = -J_0^{IJ}, \quad \frac{i}{\hbar}[\tilde{\phi}^I, \tilde{\phi}^J]_* = -J_0^{IJ}, \quad I, J = 1, \cdots, 2n \tag{166}$$

を満たす central functions $\tilde{\phi}^I \in Z \otimes \wedge^0$ を持ってきて（§B.2 参照。）

$$\Phi_I = -J_{0IJ}\tilde{\phi}^J, \quad \tilde{\theta}^I = d\tilde{\phi}^I = -J_0^{IJ}\Theta_J, \tag{167}$$

と定める。ここで $J_0^{IJ} = -J_0^{JI}$ は（x^μ, y^i に依存しない）定数で $J_{0IJ}J_0^{JK} = \delta_I^K$ とする。この式から $\tilde{\phi}^I$ を $\hbar$ で変形された非可換な座標、$\tilde{\theta}^I$ をその自然な 1-form の座標基底とみなせる。さらにこのとき (166)(167) から[90]

$$\begin{aligned} &\tfrac{i}{\hbar}[Q(\Phi_I), Q(\Phi_J)] = J_{0IJ}, \quad \frac{i}{\hbar}[\Phi_I, \Phi_J]_* = J_{0IJ}, \\ &\tfrac{i}{\hbar}[Q(\Phi_I), Q(\tilde{\phi}^J)] = \delta_I^J, \quad \frac{i}{\hbar}[\Phi_I, \tilde{\phi}^J]_* = \delta_I^J \end{aligned} \tag{168}$$

が成り立つことに注意すると $-J_{IJ}$ で足を下げた Φ_I に付随した双対基底 $\hat{\partial}_I$ を定めることができる。つまり 2 行目の式を $Q(\tilde{\phi}^J), \tilde{\phi}^J$ に関する偏微分の式と解釈して

$$\hat{d} = \tilde{\theta}^I \hat{\partial}_I := \tilde{\theta}^I \frac{i}{\hbar}[Q(\Phi_I), \cdot], \quad d_* = \tilde{\theta}^I \partial_{*I} := \tilde{\theta}^I \frac{i}{\hbar}[\Phi_I, \cdot]_*, \tag{169}$$

[90] (166)(167)(168) は (global) $Sp(n)$ 変換で不変な式であることに注意しよう.

と書くことにする。実際 (168) から

$$
\begin{aligned}
\hat{d}^2 = 0, \qquad\qquad & d_*^2 = 0, \\
\hat{d}Q(\tilde{\phi}^I) = \tilde{\theta}^I = d\tilde{\phi}^I, \quad & d_*\tilde{\phi}^I = \tilde{\theta}^I = d\tilde{\phi}^I,
\end{aligned}
\tag{170}
$$

が成り立つ。1 行目から $\hat{d}, d_*$ は differential であり、2 行目からそれらから自然に定義した 1-form の基底が以前に普通の d を使って定義した基底と一致していることがわかる。そして $\hbar \to 0$ とすると d_* は普通の可換な幾何学での d として作用するものになる。

ここで定めた非可換座標 $\tilde{\phi}^I$ は

$$
\Omega_0 = -\frac{1}{2}\omega_{ij}\theta^i \wedge \theta^j = \frac{1}{2}J_{0IJ}d\tilde{\phi}^I|_{\hbar=0} \wedge d\tilde{\phi}^J|_{\hbar=0}, \tag{171}
$$

に注意すると普通の可換な symplectic 多様体での Darboux 座標を $\hbar$ で変形したものであることがわかる。つまり $\tilde{\phi}^I = x^I + \mathcal{O}(\hbar)$ と書くとき x^I は (M, Ω_0) の Darboux 座標である。(170) から $\tilde{\theta}^I = d\tilde{\phi}^I = dx^I + \mathcal{O}(\hbar), \hat{\partial}_I = \partial_I + \mathcal{O}(\hbar)$ なのでこれらは普通の M の可換な幾何学を自然に $\hbar$ で非可換に変形したものだ言えるだろう。

この座標系でみると (160),(161) は

$$
\mathcal{D}a = \hat{d}a - i[Q(\hat{A}_{\gamma 0}), a], \quad \mathcal{D}_* a_0 = d_* a_0 - i[\hat{A}_{\gamma 0}, a_0]_*, \tag{172}
$$

となり、この表式から自然に $Q(\hat{A}_{\gamma 0}) := \tilde{\theta}^I Q(\hat{A}_{\gamma 0 I})$ あるいは $\hat{A}_{\gamma 0} := \tilde{\theta}^I \hat{A}_{\gamma 0 I}$ を非可換ゲージ場と同一視できる。対応する field strength $\hat{F}_\gamma$ (163) and $\hat{F}_{\gamma *}$ (165) は

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_\gamma &= \frac{1}{2}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J \left(\hat{\partial}_I Q(\hat{A}_{\gamma 0 J}) - \hat{\partial}_J Q(\hat{A}_{\gamma 0 I}) - i[Q(\hat{A}_{\gamma 0 I}), Q(\hat{A}_{\gamma 0 J})] - \frac{J_{0IJ}}{\hbar}\right) \\
&= F_\gamma - \frac{1}{2\hbar}J_{0IJ}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J, \\
\hat{F}_{\gamma *} &= \frac{1}{2}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J \left(\partial_{*I}\hat{A}_{\gamma 0 J} - \partial_{*J}\hat{A}_{\gamma I} - i[\hat{A}_{\gamma 0 I}, \hat{A}_{\gamma 0 J}]_* - \frac{J_{0IJ}}{\hbar}\right) \\
&= F_{\gamma *} - \frac{1}{2\hbar}J_{0IJ}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J,
\end{aligned}
\tag{173}
$$

と書き換えられる。ここで F_γ および $F_{\gamma *}$ が平坦時空上の非可換 Yang-Mills 理論で定義される普通の field strength の部分である。残りのこの差の部分は「背景」から来るが central 2-form なので共変微分の交換子の中では無視できる。

Weyl 代数束の全体のゲージ場 $\hat{A}$ としての field strength $\hat{F}_A$ はここの記号で

$$
\hat{F}_A = F_\gamma - \frac{1}{\hbar}\left(\Omega - \frac{1}{2}J_{0IJ}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J\right) = F_\gamma - \frac{1}{\hbar}\left(\Omega_1 - \frac{1}{2}J_{0IJ}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J|_{\deg \geq 2}\right) \tag{174}
$$

となり、非可換ゲージ場 F_γ と M の symplectic 構造 Ω_0 からの $\mathcal{O}(\hbar)$ の「揺らぎ」の和で書けることがわかる。この表式を眺めると弦理論の D-brane の Born-Infeld 作用に出てくる $F + B + g$ という組み合わせが思い出される。(F は D-brane 上のゲージ場、B, g は弦理論背

景のB場およびclosed string metricだった。）これは今、ここで構成している非可換ゲージ理論が実はBが定数でない非自明な背景時空における弦理論のD-braneを表わす非可換な記述の候補である可能性の現れかもしれない。

(153)より、非可換ゲージ変換 $V \in W_D$ のもとで $\hat{A}_\gamma$ はup to centerで共変に変換する：

$$\hat{A}'_\gamma = V^{-1} \circ \hat{A}_\gamma \circ V + C, \quad C = C_A + C_\gamma, \; dC = 0. \tag{175}$$

この I 成分に D を作用させると

$$\hbar D \hat{A}'_{\gamma I} = \Theta_I + dC_I \tag{176}$$

となるが、今固定したclosed 1-form基底 $\tilde{\theta}^I$ を使っているので(175)の最後の式は

$$dC_I = 0 \quad \therefore C_I = C_{AI} + C_{\gamma I} = \text{constant} \tag{177}$$

となり(176)の右辺第2項は零、つまり $\hbar D\hat{A}'_{\gamma I} = \Theta_I$ となり(158)より V による非可換ゲージ変換後も一貫して同じ基底を用いた記述ができることがわかる。従って今の固定した座標系で(175)は

$$\begin{aligned} Q(\hat{A}'_{\gamma 0I}) &= V^{-1} \circ Q(\hat{A}_{\gamma 0I}) \circ V + iV^{-1} \circ \hat{\partial}_I V + C_I \\ & \quad C_I = C_{AI} + C_{\gamma I} = \text{constant}, \; dC_\gamma = 0, \; dC_A = 0 \end{aligned} \tag{178}$$

と書き換えることができ、また $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ 上の $\hat{A}_{\gamma 0I}$ の言葉では

$$\hat{A}'_{\gamma 0I} = V_0^{-1} * \hat{A}_{\gamma 0I} * V_0 + iV_0^{-1} * \partial_{*I} V_0 + C_I, \quad C_I = \text{constant} \tag{179}$$

となっている。これは（up to constant C_I termで）平坦な時空上の非可換Yang-Mills理論のゲージ変換の式と一致している。またこの非可換ゲージ変換のもとでfield strength(173)は

$$\hat{F}'_{\gamma IJ} = V^{-1} \circ \hat{F}_{\gamma IJ} \circ V, \quad \hat{F}'_{\gamma * IJ} = V_0^{-1} * \hat{F}_{\gamma IJ} * V_0 \tag{180}$$

と共変に変換されるので $\hat{F}_{\gamma IJ}$（あるいは $\hat{F}_{\gamma * IJ}$）の $\circ$ 積（あるいは $*$ 積）の多項式のtrace(123)は W_D 上（あるいは $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ 上）の非可換ゲージ不変量になる。[91] つまり、ここで構成している非可換ゲージ理論の作用の候補として普通のYang-Mills理論の類推から

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{F}_{\gamma IJ} \circ \hat{F}_{\gamma I'J'} J_0^{II'} J_0^{JJ'}\right) =: \mathrm{Tr}\left(\hat{F}_{\gamma * IJ} * \hat{F}_{\gamma * I'J'} J_0^{II'} J_0^{JJ'}\right) \tag{181}$$

の形が考えられる。足のつぶしかたはglobal $Sp(n)$ 不変になるようにとった。

今のセットアップでは M の計量ではなくsymplectic構造 Ω_0 が始めに入っているので自然な作用の形としては(181)が考えられる。ただ弦理論、あるいは普通の重力理論と結びつけるには M にさらに計量が入った場合を考えて欲しい物理を記述する作用を探す必要があるだろう。

---

[91] (163)より $\hat{F}_{\gamma IJ} \in W_D$ なので（compact supportなら）(123)のtraceをとることができる。

標準的な座標を選んだときに尊重されたglobal $Sp(n)$ 対称性を気にしなければ、あるいは標準的な座標による基底にこだわらなければ、手で適当な定数の対称行列 G^{IJ} を持ってきて非可換ゲージ変換(178)(179)で不変な

$$S = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(G^{II'}G^{JJ'}\hat{F}_{\gamma IJ}\circ\hat{F}_{\gamma I'J'}\right) =: \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(G^{II'}G^{JJ'}\hat{F}_{\gamma * IJ} * \hat{F}_{\gamma * I'J'}\right) \tag{182}$$

も作用の候補になりうる。

また適当な3階反対称な定数の組 f^{IJK} を手で持ってくればChern-Simons型の

$$\begin{aligned} S &= f^{IJK}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}Q(\hat{A}_{\gamma 0I})\circ\hat{\partial}_J Q(\hat{A}_{\gamma 0K}) - \frac{i}{3}Q(\hat{A}_{\gamma 0I})\circ Q(\hat{A}_{\gamma 0J})\circ Q(\hat{A}_{\gamma 0K})\right) \\ &= f^{IJK}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\hat{A}_{\gamma 0I} * \partial_{*J}\hat{A}_{\gamma 0K} - \frac{i}{3}\hat{A}_{\gamma 0I} * \hat{A}_{\gamma 0J} * \hat{A}_{\gamma 0K}\right) \end{aligned} \tag{183}$$

も非可換ゲージ不変である。

6.4 一般の場合のGauge Equivalence Relation

ここでは(noncommutative) gauge equivalence relationを満たす $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}, *)$ 上の非可換ゲージ場から $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}, *')$ 上のものへの写像を議論しよう。そのような写像を'Seiberg-Witten' mapと呼ぶことにする。[92] $*$ 積がMoyal積になるような平坦な背景でのgauge equivalence relationから導かれるSeiberg-Witten mapに関しては§3で議論したものであり、そこでSeiberg-Wiiten mapの ϑ 空間におけるpath dependenceによる不定性があることを示した。ここでは§6.3の一般の状況でその不定性に対応するものの起源を議論する。

§6.3で考えた状況において二つの異なる非可換代数
$(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}, *)$, $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}, *')$ 上の場および非可換ゲージ場の間の関係は $(W_D, \circ), (W_{D'}, \circ)$ の間の同型写像である"gauge transformation"(§5.2)から導かれる。この(noncommutative) gauge equivalence relationに対応する同型写像の図式は

$$\begin{array}{ccc} W_D & \xrightarrow{A} & W_{D'} \\ {\scriptstyle A_D}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle A_{D'}} \\ W_D & \xrightarrow[A]{} & W_{D'} \end{array}$$

のように表される。gauge equivalence relationを満たすということはこの図式が可換であるいうことである。図式は $A_{D'} = AA_DA^{-1}$ が成り立つときのみ可換であり、このように $A_{D'}$ をとることは $W(L, \mathcal{A})$ の自己同型写像が群を成すことから常に可能である。

[92]可換なゲージ場と非可換なゲージ場の間の写像をSeiberg-Witten mapと呼ぶことも多いがここでは一般の非可換同士のものを指す。

非可換ゲージ変換 A_D を (114) のように局所的に $V \in W_D$ を用いて表し、"gauge transformation" A を (112) のように U を用いて表すと

$$A_{D'}a := AA_DA^{-1}a = (U^{-1} \circ V \circ U)^{-1} \circ a \circ (U^{-1} \circ V \circ U). \tag{184}$$

から $A_{D'}$ は $V' = U^{-1} \circ V \circ U \in W_{D'}$ で与えられる非可換ゲージ変換である。

§3 で議論した gauge equivalence relation の $\delta\theta^{ij}$ による変換 δ がここでの A （あるいは U ）にあたる。非可換な $*$ 積が Moyal 積で与えられる §3 の状況のもとでは $*$ 積を特徴づけるものは非可換パラメータ θ^{ij} だけであり $\delta\theta^{ij}$ により違う $*$ 積への変換を引き起こしていた。今の一般的な状況においては "gauge transformation" A （あるいは U）が違う $*$ 積への変換を引き起こしている。この対応でみると noncommutative gauge taransformation のゲージパラメータの変換、つまり V から V' への変換が §3 では λ から λ' の変換に対応している。

従って上の図式から $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ 上の非可換ゲージ場 $\hat{A}_{\gamma 0}$ から $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *')$ 上の非可換ゲージ場 $\hat{A}'_{\gamma' 0}$ への 'Seiberg-Witten' map は (153)(159) から

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'^{I'}\hat{A}'_{\gamma 0 I'} &= \tilde{\theta}^I\sigma\left(U^{-1} \circ Q(\hat{A}_{\gamma 0 I}) \circ U\right) - \frac{1}{\hbar}\tilde{\theta}^I\sigma\left(U^{-1} \circ Q(\Phi_I) \circ U\right) + \frac{1}{\hbar}\tilde{\theta}^I\Phi_I + C, \\ dC &= 0, \end{aligned} \tag{185}$$

のように表わされる。ここで基底 $\tilde{\theta}^I$ と $\tilde{\theta}'^{I'}$ は違う非可換代数上のものなので一般には異なる。

次に §3 で議論した Seiberg-Witten map の不定性に対応するものを考えるため $*$ 積を変える "gauge transformation" を 2 回続けて行ったとしよう。それぞれ U_1, U_2 によって引き起こされるとすると続けて変換した結果は $U_2 \circ U_1$ でにより引き起こされる。U_1 と U_2 の変換の順序を入れ替えると $U_1 \circ U_2$ になり $\circ$ 積の非可換性から $U_2 \circ U_1 \neq U_1 \circ U_2$ なので変換の順序により 2 回続けて行った変換は異なったものになる。この違いが §3 での Seiberg-Witten map の θ-空間 ϑ の path dapendence による不定性に対応している。

以上より今の一般的な状況において、(noncommutative) gauge equivalence relation を満たす 'Seiberg-Witten' map[93] は "gauge transformation" であり、その不定性は "gauge transformation" の非可換性によるものである。

6.5 'Seiberg-Witten' map

§6.4 の図式において A として特に "gauge transformation" で異なる $*$ 積に写る場合を議論したが一般には f_*^0 が恒等写像でない (96) によって flat section W_D が $W_{D'}$ に写る場合を考えることもできる。この場合 (153) に相当する式は

$$\hat{A}'_{\gamma'} = f_*^0(U^{-1} \circ \hat{A}_\gamma \circ U) + C, \quad dC = 0 \tag{186}$$

となるので (159) より我々の定義した非可換ゲージ場の間の 'Seiberg-Witten' map は

$$\tilde{\theta}'^{I'}\hat{A}'_{0I'} = f_*^0\tilde{\theta}^I\left(\sigma(f_*^0(U^{-1} \circ Q(\hat{A}_{0I}) \circ U)) - \frac{1}{\hbar}\sigma(f_*^0(U^{-1} \circ Q(\Phi_I) \circ U)) + \frac{1}{\hbar}f_*^0(\Phi_I) + C_I\right) \tag{187}$$

[93] このような解釈は [18][19][20][21] でも議論されている。

のように表される。このときの非可換ゲージ変換のパラメータの間の変換は

$$V_0' = f_*^0(U^{-1} \circ Q(V_0) \circ U) \tag{188}$$

となる。

ところで形式的には gauge equivalence relation（(26) の有限変換形）を満たすこの 'Seiberg-Witten' map(187)(188) は物理的にはどういう意味をもつのだろうか？

§3.3 で見たように $U(1)$（あるいは 1×1 行列）の場合には (26) を満たす非可換ゲージ場の変換 (元々の Seiberg-Witten map) のもとで、一般化された非可換 Born-Infeld 作用 (44) が up to $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ で不変であるという意味を持っていた。ここでの一般的な背景での 'Seiberg-Witten' map(187)(188) も単に非可換ゲージ場の間の変換という以上に §6.3 の最後に作用の候補として挙げた (181)(182) のような非可換ゲージ場の field strength $\hat{F}_{\gamma IJ}$ の $\circ$ 積の多項式の trace を異なる W_D^c 上で（あるいは異なる $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ 上で）不変にする非可換ゲージ場の変換という意味を持つことを示そう。

$A : W_D \to W_{D'}$ として (96) の形（つまり $Aa = f_*^0(U^{-1} \circ a \circ U)$）を考える。そして変換前後の §6.3 の 1-form 基底の関係を

$$\tilde{\theta}'^I = f_*^0 \tilde{\theta}^I, \quad \Theta_I' = f_*^0 \Theta_I \tag{189}$$

という共変な形に選ぶ。一般には変換前後共に §6.3 の後半で採用した標準的な座標 (168) による 1-form の基底で (189) のようにとることはできないが、§6.3 の W_D 上の非可換ゲージ場の定義では基底を何か一つ固定すれば十分だったので、ここでは特に (189) と定めることにする。このとき 'Seiberg-Witten' map(186) は

$$\hat{A}'_{\gamma' I} = f_*^0(U^{-1} \circ \hat{A}_{\gamma I} \circ U)) + C_I \tag{190}$$

（ここで C_I は定数。）となり、非可換ゲージ場の field strength $\hat{F}_{\gamma IJ}$ は $\hat{A}_{\gamma I}$ を用いれば (163)(159) より

$$\hat{F}_{\gamma IJ} = -i[\hat{A}_{\gamma I}, \hat{A}_{\gamma J}] \tag{191}$$

と表されることに注意すると

$$\hat{F}'_{\gamma' IJ} = f_*^0(U^{-1} \circ \hat{F}_{\gamma IJ} \circ U) = A(\hat{F}_{\gamma IJ}) \tag{192}$$

という変換則が得られる。従って trace の性質 (124) より $\hat{F}_{\gamma IJ}$ の $\circ$ 積の多項式の trace はこの 'Seiberg-Witten' map のもとで不変である。例えば (182) は

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}'\left(G^{IK}G^{JL}\hat{F}'_{\gamma' IJ} \circ \hat{F}'_{\gamma' KL}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(G^{IK}G^{JL}\hat{F}_{\gamma IJ} \circ \hat{F}_{\gamma KL}\right) \tag{193}$$

あるいは

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}'\left(G^{IK}G^{JL}\hat{F}'_{\gamma' *' IJ} *' \hat{F}'_{\gamma' *' KL}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(G^{IK}G^{JL}\hat{F}_{\gamma * IJ} * \hat{F}_{\gamma * KL}\right) \tag{194}$$

を満たす。

ただし、§3 の Seiberg-Witten map と 'Seiberg-Witten' map(187)(188) では前者は写った後の非可換ゲージ変換パラメータが変換前の（非可換）ゲージ場に依存する形になっているのに対し、後者は一般のパラメータになっているので少し違うものを扱っていることに注意しよう。その結果それぞれ不変に保つ非可換ゲージ不変量が異なっている。[94]

7 定数背景場

Fedosov の $*$ 積を用いることで M として一般の symplectic 多様体から非可換ゲージ理論を前節のように形式的には考えることができたが、一般的な状況のまま露わな計算を遂行して、いろいろな式を書き下すのは不可能である。そこでここでは前節までの構成法を全て遂行できる最も簡単な例について議論する。

ただここでの状況は簡単すぎて Fedosov の方法を用いる必要はなく従来議論されている Moyal 積での非可換ゲージ理論に帰着するが、一般的な状況で構成したもの背景のパラメータの入り方をみることができ、従来知られているものと比較するためには有用である。

$M = \mathbb{R}^{2n}$ とし $N = 1$ (つまり $U(1)$ ゲージ理論の非可換版) の場合を考え ${\Gamma^i}_j = 0$ で ${\theta^i}_\mu, \omega_{ij}, R_{Eij}, \Omega_{1ij}$ は全て定数とする。さらに μ が y の 2 次式までつまり

$$\mu = \mu_i y^i + \frac{1}{2}\mu_{ij} y^i y^j \tag{195}$$

の形でその係数も定数の場合を考える。ただし次数の仮定から $\Omega_{1ij}, \mu_i, \mu_{ij}$ はいずれも $\hbar$ に関しては 1 次以上の形式的冪級数で表されているとする。

この状況で (84) より r は y について 1 次式の

$$r = \mu_i \theta^i + r^{(2)}_{ij} y^i \theta^j \tag{196}$$

の形になる。ここで $r^{(2)}$ は次の方程式の解である：[95]

$$r^{(2)}_{ij} = \mu_{ij} - \frac{1}{2}(i\hbar R_{Eij} + \Omega_{1ij}) + \frac{1}{2} r^{(2)}_{ki}\omega^{kl} r^{(2)}_{lj} \tag{198}$$

flat section $Da = 0$ の式は

$$\left({X_i}^\mu \partial_\mu a - \frac{\partial}{\partial y^i} a + r^{(2)}_{ki}\omega^{kl}\frac{\partial}{\partial y^l} a \right)\theta^i = 0 \tag{199}$$

---

[94] 前者は §3.3 で注意したように up to $\mathcal{O}(\partial\hat{F})$ の近似での話だったのに対し、後者は厳密な不変量であることも違う。

[95] $n = 1$ つまり M が 2 次元のときには簡単に解けて

$$\begin{aligned} r^{(2)}_{11} &= \mu_{11}, \quad r^{(2)}_{22} = \mu_{22}, \\ r^{(2)}_{12} &= \mu_{12} - \omega_{12} \pm \sqrt{\omega_{12}^2 + \mu_{12}^2 - \mu_{11}\mu_{22} - \omega_{12}(i\hbar R_E + \Omega_1)_{12}}, \\ r^{(2)}_{21} &= \mu_{12} + \omega_{12} \mp \sqrt{\omega_{12}^2 + \mu_{12}^2 - \mu_{11}\mu_{22} - \omega_{12}(i\hbar R_E + \Omega_1)_{12}} \end{aligned} \tag{197}$$

と表される。

となるので[96](90) は

$$a = Q(a_0(x)) = a_0(Q(x)) \tag{200}$$

と求まる。ただし、

$$Q(x^\mu) = x^\mu + y^i \left(\frac{1}{1 + (\omega^{-1} r^{(2)})^T} X \right)_i^{\ \mu} \tag{201}$$

である。

以上より今の簡単な例では $*$ 積は (92) より

$$a_0(x) * b_0(x) = a_0(x) \exp\left(\frac{i}{2} \vartheta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial_\mu} \overrightarrow{\partial_\nu} \right) b_0(x), \qquad a_0(x), b_0(x) \in C^\infty(M)[[\hbar]] \tag{202}$$

という Moyal 型の積でその非可換パラメータ $\vartheta^{\mu\nu}$ が

$$\begin{aligned} \vartheta^{\mu\nu} &:= -i(x^\mu * x^\nu - x^\nu * x^\mu) = -i\sigma([Q(x^\mu), Q(x^\nu)]) \\ &= -\hbar \left(X^T \frac{1}{1 + \omega^{-1} r^{(2)}} \omega^{-1} \frac{1}{1 + (\omega^{-1} r^{(2)})^T} X \right)^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{203}$$

で与えられる定数となる。

この非可換パラメータ $\vartheta^{\mu\nu}$ は

$$\vartheta^{\mu\nu} = \hbar \left(X^T \frac{1}{\mu + r^{a(2)} + \omega} \omega \frac{1}{\mu - (r^{a(2)} + \omega)} X \right)^{\mu\nu} \tag{204}$$

（ここで $r^{a(2)}$ は $r_{ij}^{(2)}$ の反対称部分。$\mu := (\mu_{ij})$ は対称行列。）と書きかえることもできるので $\omega_{ij} \sim B_{ij}, \mu_{ij} \sim g_{ij}$ と思うと (204) は形式的には定数 B 場の背景での開弦の端の非可換パラメータ (13) とやや似た式になっている。しかしこの段階では $\hbar$ と α' の自然な対応があるようには見えない。

標準的な座標 (166) $\{\tilde{\phi}^I\}, I = 1, \cdots, 2n$ を求めるためにまず symplectic 形式を

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= -\frac{1}{2} \omega_{ij} \theta^i \wedge \theta^j = -\frac{1}{2} (\theta^T \omega \theta)_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} J_{0IJ} d\tilde{\phi}_0^I \wedge d\tilde{\phi}_0^J = \frac{1}{2} (\tilde{\phi}_0^T J_0 \tilde{\phi}_0)_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \tag{205}$$

のように標準化しておく。ここで $\tilde{\phi}_0^I = \tilde{\phi}_{0\mu}^I x^\mu$ が Darboux 座標である。このとき (166) を満たす標準的な座標は

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^I &= \tilde{\phi}_\mu^I x^\mu, \\ \tilde{\phi}_\mu^I &= \left(\tilde{\phi}_0 X^T (1 + \omega^{-1} r^{(2)}) \theta \right)_{\ \mu}^I \end{aligned} \tag{206}$$

[96] ここで $X_i = X_i^{\ \mu} \partial_\mu$ は $\theta^i = \theta^i{}_\mu dx^\mu$ の双対基底で $X_i^{\ \mu} \theta^j{}_\mu = \delta_i^j$ を満たすとしている。

で与えられる。従ってこのとき derivation d_* は (169) より

$$\begin{aligned} d_* a_0 &= \tilde{\theta}^I \frac{i}{\hbar}[-J_{0IJ}\tilde{\phi}^J, a_0]_* \\ &= -dx^\mu i(\vartheta^{-1})_{\mu\nu}[x^\nu, a_0]_* = da_0 \end{aligned} \tag{207}$$

となり、普通の外微分 d とちょうど一致する。

今の状況で §5.3 の定理の同型写像 A は

$$\begin{aligned} Aa &= AQ(a_0(x)) = U^{-1} \circ Q(a_0(x)) \circ U \\ &= a_0\left(X^T \frac{1}{1+\omega^{-1}r^{(2)}}\theta(x+yX)\right) \end{aligned} \tag{208}$$

で与えられる。ここで U は

$$U = \exp_\circ\left(\frac{-i}{\hbar} y^i r_{ij}^{(2)} \theta^j{}_\nu x^\nu\right) \tag{209}$$

である。従って (123) より trace は

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}a &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}}\sqrt{\det(\theta^T\omega\theta)}\int d^{2n}x a_0\left(X^T\frac{1}{1+\omega^{-1}r^{(2)}}\theta(x+yX)\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n\sqrt{\det\vartheta^{\mu\nu}}}\int d^{2n}x a_0(x) \end{aligned} \tag{210}$$

となる。

以上より、この「定数背景」においては §6.3 で構成した非可換ゲージ理論は従来の Moyal 積による非可換ゲージ理論を再現することが確かめられた。

同様の「定数背景」の状況が 2 つある場合、つまり $M = \mathbb{R}^{2n}$ で $\omega_{ij}, \theta^i{}_\mu$ は定数、$\Gamma^i{}_j = 0$ のもと定数の $(R_{Eij}, \Omega_{1ij}, \mu_i, \mu_{ij})$ とで $(R'_{Eij}, \Omega'_{1ij}, \mu'_i, \mu'_{ij})$ で定まる 2 つの代数 $W_D, W_{D'}$ を考えたとき $A: W_D \to W_{D'}$ の同型写像は

$$\begin{aligned} Aa &= U^{-1} \circ Q(a_0(x)) \circ U \\ &= a_0\left(X^T\frac{1}{1+\omega^{-1}r^{(2)}}(1+\omega^{-1}r'^{(2)})\theta(x+X^T\frac{1}{1+\omega^{-1}r'^{(2)}}y\right) \\ &= Q'\left(a_0\left(X^T\frac{1}{1+\omega^{-1}r^{(2)}}(1+\omega^{-1}r'^{(2)})\theta x\right)\right), \\ U &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}y^i(r'^{(2)}-r^{(2)})_{ij}\theta^j{}_\mu x^\mu\right) \end{aligned} \tag{211}$$

で与えられる。

8　2次元

前節のような定数背景だけ考えていたのでは結局 $*$ 積は普通の Moyal 積に落ち着くので Fedosov の $*$ 積を用いる意義があまりなく、やはり元々の動機である定数でない非自明な背景に適用したい。§5 のように原理的には計算する手続きがあるとはいえ Fedosov の方法で $*$ 積を露わに計算するのは、背景が定数でない非自明の場合は急に難しくなる。しかしここで示すように $n=1$ つまり M の次元が実2次元の場合は計算できる場合がある。ここでは計算できる範囲で定数でない非自明な場合を扱い、特に $CP^1 \simeq S^2$ と H^2 の場合に注目しよう。

8.1　円対称な場合

まず、M の symplectic form Ω_0 が

$$\Omega_0 = e^{\Phi(r)} r dr \wedge d\theta \tag{212}$$

で与えられる場合を考えよう。Φ として r, θ の関数を考える場合は2次元の一般の symplectic form になるが、ここでの簡単化はこれが1変数 r のみの関数であることである。以下の構成法をみるとわかるように形式的には $*$ 積を定義する上で r が動径方向（つまり円対称）という意味を持つ必要はないことに注意しておく。

物理では普通 M に何か計量が入っている場合つまり Riemann 多様体から出発することが多いが今考えている (212) は次のように考えればそれと関連づいていることがわかる。つまり2次元の場合 M に計量 ds^2 を入れたとき適当に一般座標変換することにより共形的に平坦な

$$\begin{aligned} & ds^2 = e^{\Phi}\left(d(x^1)^2 + d(x^2)^2\right) = e^{\Phi}\left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right) \\ & x^1 = r\cos\theta, \quad x^2 = r\sin\theta \end{aligned} \tag{213}$$

の形に持っていけるが、このときの volume form が closed で非退化な (212) の形になるのでこれを M の symplectic form と同一視するということである。

(212) を

$$\begin{aligned} & \Omega_0 = \theta^1 \wedge \theta^2 = -\frac{1}{2}\omega_{ij}\theta^i \wedge \theta^j \\ & \theta^1 = e^{\Phi} dr, \quad \theta^2 = r d\theta, \quad \omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{214}$$

の形に書き換えておく。これは非自明な r 依存性を θ^i に委ねることにより ω_{ij} を標準的な定数行列にするためである。そのためこの ω_{ij} を保つ L の symplectic connection は trivial な ${\Gamma^i}_j = 0$ にとることができる。さらに簡単のため $\mathcal{E}$ の connection も trivial $\Gamma_{\mathcal{E}} = 0$ としよう。従って (78) で $R = 0$ になる。Abelian connection D を定める r を求めるのに必要なパラメータ Ω_1 も零にとる：$\Omega_1 = 0$.

この状況のもとで r を厳密に求めよう。一般には (84)（あるいは (127)）を解けばよいのだが厳密にもとめるために (84) の iteration の必要がなくなる条件：

$$dr + \frac{i}{2} r \circ r = 0 \tag{215}$$

を置く、[97] つまりこれを満たすようにパラメータ μ を調整するといってもよい。この条件 (215) は $r = r_1(r, y^i, \hbar)\theta^1$ という形の ansatz を置くことで $dr = 0, r \circ r = 0$ となり、自動的に満たされる。結局 ansatz を満たす r （およびパラメータ μ ）は r が y^i の 2 次式だとすると (84) より

$$\begin{aligned} r &= \left(3A(r)(y^1)^2 + e^{-\Phi(r)} r^{-1} y^1 y^2\right)\theta^1 \\ \mu &= A(r)(y^1)^3 + \frac{1}{3} e^{-\Phi(r)} r^{-1} (y^1)^2 y^2 \end{aligned} \tag{216}$$

のように求まる。ここで $A(r)$ は r の任意関数である。

この r による Abelian connection D で定まる flat section の式 $Da = 0$ は

$$\begin{aligned} &\theta^1 \left(e^{-\Phi} \frac{\partial a}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial y^1} + e^{-\Phi} r^{-1} \left(y^2 \frac{\partial a}{\partial y^2} - y^1 \frac{\partial a}{\partial y^1} \right) + 6Ay^1 \frac{\partial a}{\partial y^2} \right) \\ &+\theta^2 \left(r^{-1} \frac{\partial a}{\partial \theta} - \frac{\partial a}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \tag{217}$$

となりこの解を求めると 2 変数の任意関数 $F(X, Y)$ を用いて

$$\begin{aligned} a = F\Bigg(&\int_{r_0}^{r} e^{\Phi(r')} r' dr' + y^1 r, \\ &\theta + \frac{y^2}{r} + \int_{r_0}^{r} dr' \frac{6A(r') e^{\Phi(r')} \int_{r_0}^{r'} e^{\Phi(r'')} r'' dr''}{(r')^2} - \left(y^1 r + \int_{r_0}^{r} e^{\Phi(r')} r' dr' \right) \int_{r_0}^{r} dr' \frac{6A(r') e^{\Phi(r')}}{(r')^2} \Bigg) \end{aligned} \tag{218}$$

となる。（ここで r_0 は適当な定数である。）この式は

$$\int_{r}^{G(r, y^1)} e^{\Phi(r')} r' dr' = y^1 r \tag{219}$$

で定まる関数 $\Phi(r, y^1)$ を用いて

$$\begin{aligned} a &= Q(a_0(r, \theta)) \\ &= a_0\Bigg(G(r, y^1), \theta + \frac{y^2}{r} - \int_{r}^{G(r, y^1)} dr' \frac{6A(r') e^{\Phi(r')}}{(r')^2} \int_{r_0}^{r'} e^{\Phi(r'')} r'' dr'' \\ &+ \int_{r_0}^{G(r, y^1)} e^{\Phi(r')} r' dr' \int_{r_0}^{G(r, y^1)} \frac{6A(r') e^{\Phi(r')}}{(r')^2} dr' - \left(y^1 r + \int_{r_0}^{r} e^{\Phi(r')} r' dr' \right) \int_{r_0}^{r} \frac{6A(r') e^{\Phi(r')}}{(r')^2} dr' \Bigg) \end{aligned} \tag{220}$$

と書き直すことができ $*$ 積は (92) で与えられる。

次により具体的な例を挙げて露わな表式を書き下しておこう。

[97] この条件をはずすと 2 次元の場合でも r の計算は難しくなる。また、今の状況では $\nabla = d$ である。

8.2 $\mathbb{R}^2$ の極座標表示

$M=\mathbb{R}^2$ の場合の表式を書き下そう。この平坦な場合については（$2n$ 次元で）Cartesian 座標ではすでに §7 において本質的に Moyal 積になるものを議論したが、ここでは 2 次元で極座標を用いた場合の表式を考える。ここで構成する $*$ 積は Cartesian 座標で書いた Moyal 積を単に極座標に変数変換したものではないことに注意しよう。

$\mathbb{R}^2$ は flat な計量なので (213) で $\Phi=0$ とした場合である。従って付随する volume form は $\Omega_0=rdr\wedge d\theta$ で、これを symplectic form とみなそう。簡単のため (216) で $A(r)=0$ とした場合を考える。このとき flat section は (220) より

$$a=Q(a_0(r,\theta))=a_0\left(\sqrt{r^2+2ry^1},\theta+\frac{y^2}{r}\right) \tag{221}$$

となるので $*$ 積は結局

$$\begin{aligned}
&a_0(r,\theta)*b_0(r,\theta)\\
&=\left(a_0\left(\sqrt{r^2+2ry^1},\theta+\frac{y^2}{r}\right)\exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^1}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^2}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^1}\right)\right)\right.\\
&\left.\cdot b_0\left(\sqrt{r^2+2ry^1},\theta+\frac{y^2}{r}\right)\right)\Bigg|_{y^1=y^2=0}
\end{aligned} \tag{222}$$

となる。特に r,θ 同士の $*$ 積は

$$\begin{aligned}
&r*r=r^2, \qquad \theta*\theta=\theta^2,\\
&r*\theta=r\theta-\frac{i\hbar}{2r}, \quad \theta*r=r\theta+\frac{i\hbar}{2r}
\end{aligned} \tag{223}$$

となるので非自明な交換関係は

$$[r,\theta]_*=-\frac{i\hbar}{r} \tag{224}$$

となる。これは symplectic form $\Omega_0=rdr\wedge d\theta$ を元にして作った Poisson 括弧の $i\hbar$ 倍と一致している。ちなみに今の定義した $*$ 積 (222) を Cartesian 座標 $x^1:=r\cos\theta, x^2:=r\sin\theta$ で表現すると

$$\begin{aligned}
x^1*x^1&=(x^1)^2-\frac{(x^1)^2-(x^2)^2}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{\hbar^2}{((x^1)^2+(x^2)^2)^2}}\right),\\
x^2*x^2&=(x^2)^2+\frac{(x^1)^2-(x^2)^2}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{\hbar^2}{((x^1)^2+(x^2)^2)^2}}\right),\\
x^1*x^2&=-\frac{i\hbar}{2}+x^1x^2\sqrt{1-\frac{\hbar^2}{((x^1)^2+(x^2)^2)^2}},\\
x^2*x^1&=+\frac{i\hbar}{2}+x^1x^2\sqrt{1-\frac{\hbar^2}{((x^1)^2+(x^2)^2)^2}}.\\
[x^1,x^2]_*&=-i\hbar
\end{aligned} \tag{225}$$

となる。ただしここで $\sqrt{\ }$ を用いて表現したが、これを $\hbar$ の冪で展開した形式的冪級数のほうがより正確な式である。これをみると交換関係は通常の Moyal 積のものと一致しているが $*$ 積そのものは異なっていることがわかる。通常の Moyal 積の場合は $f(x)*g(x)=f(x)g(x)+\frac{i\hbar}{2}\{f,g\}_{\mathrm{P.b.}}+\mathcal{O}(\hbar^2)$ のように §4.3 の $M_1^+=0$ だったのに対し、(222) は $M_1^+\neq 0$ の $*$ 積になっている。[98]

8.3 CP^1 の $*$ 積

CP^1 は斉次座標 $(Z^0:Z^1)$ に同値関係 $(Z^0:Z^1)\sim(\lambda Z^0:\lambda Z^1),\lambda\in\mathbb{C}-0$ を入れることで表現されるがとくに $(1:0)$ の近傍を考えて $z=Z^1/Z^0=re^{i\theta}$ とし標準的に Fubini-Study 計量を (213) において

$$e^{\Phi}=\frac{1}{(1+|z|^2)^2}=\frac{1}{(1+r^2)^2} \tag{226}$$

のように入れると flat section(220) は（簡単のため $A(r)=0$ として）

$$a=Q(a_0(r,\theta))=a_0\left(\sqrt{\frac{r^2+2r(1+r^2)y^1}{1-2r(1+r^2)y^1}},\theta+\frac{y^2}{r}\right) \tag{227}$$

となる。したがって $*$ 積は

$$\begin{aligned}
&a_0(r,\theta)*b_0(r,\theta)\\
=&\left(a_0\left(\sqrt{\frac{r^2+2r(1+r^2)y^1}{1-2r(1+r^2)y^1}},\theta+\frac{y^2}{r}\right)\exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^1}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^2}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^1}\right)\right)\right.\\
&\left.\cdot b_0\left(\sqrt{\frac{r^2+2r(1+r^2)y^1}{1-2r(1+r^2)y^1}},\theta+\frac{y^2}{r}\right)\right)_{y^1=y^2=0}
\end{aligned} \tag{228}$$

と表わされる。特に r,θ 同士の $*$ 積は

$$\begin{aligned}
&r*r=r^2, \qquad \theta*\theta=\theta^2,\\
&r*\theta=r\theta-i\hbar\frac{(1+r^2)^2}{2r}, \quad \theta*r=r\theta+i\hbar\frac{(1+r^2)^2}{2r}
\end{aligned} \tag{229}$$

となり非自明な交換関係は

$$[r,\theta]_*=-i\hbar\frac{(1+r^2)^2}{r} \tag{230}$$

[98] すなわち変形量子化の定義 (§4.2) にもともとある $\mathcal{O}(\hbar)$ の不定性の分が Moyal 積と異なっている。

である。これは symplectic form $\Omega_0 = \frac{r}{(1+r^2)^2} dr \wedge d\theta$ に付随する Poisson 括弧の $i\hbar$ 倍になっている。複素座標 $z = re^{i\theta}, \bar{z} = re^{-i\theta}$ で $*$ 積を表わすと（§B.3 参照。）

$$
\begin{aligned}
z * z &= \sqrt{\frac{r^4 - \hbar^2(1+r^2)^2}{1 - \hbar^2(1+r^2)^2}} e^{2i\theta}, \\
\bar{z} * \bar{z} &= \sqrt{\frac{r^4 - \hbar^2(1+r^2)^2}{1 - \hbar^2(1+r^2)^2}} e^{-2i\theta}, \\
z * \bar{z} &= \frac{r^2 - \hbar(1+r^2)}{1 + \hbar(1+r^2)}, \\
\bar{z} * z &= \frac{r^2 + \hbar(1+r^2)}{1 - \hbar(1+r^2)}, \\
[z, \bar{z}]_* &= \frac{-2\hbar(1+r^2)^2}{1 - \hbar^2(1+r^2)^2} = -2\hbar(1 + z * \bar{z})(1 + \bar{z} * z)
\end{aligned}
\tag{231}
$$

と表される。

8.4 $*$ 積と fuzzy sphere

$CP^1 \simeq S^2$ により上で構成した $*$ 積は §1 で述べたように非可換多様体の S^2 を非可換に変形したものを定めるので fuzzy sphere と関連していると期待されるが、実際まさに $*$ 積による代数が fuzzy sphere 代数（$su(2)$ 代数）を再現することがわかる。これを示そう。

まず上で導入した CP^1 の座標 (x^1, x^2) と $\mathbb{R}^3$ に埋め込んだ S^2 の座標
(X, Y, Z), $X^1 + Y^2 + Z^2 = 1$ との関係を明らかにしておこう。そのために図 2 ような立体射影をする。

この図 2 より (X, Y, Z) と $r = |z|, \theta = \arg z$ は

$$
X = \frac{2r}{1+r^2}\cos\theta, \quad Y = \frac{2r}{1+r^2}\sin\theta, \quad Z = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \tag{232}
$$

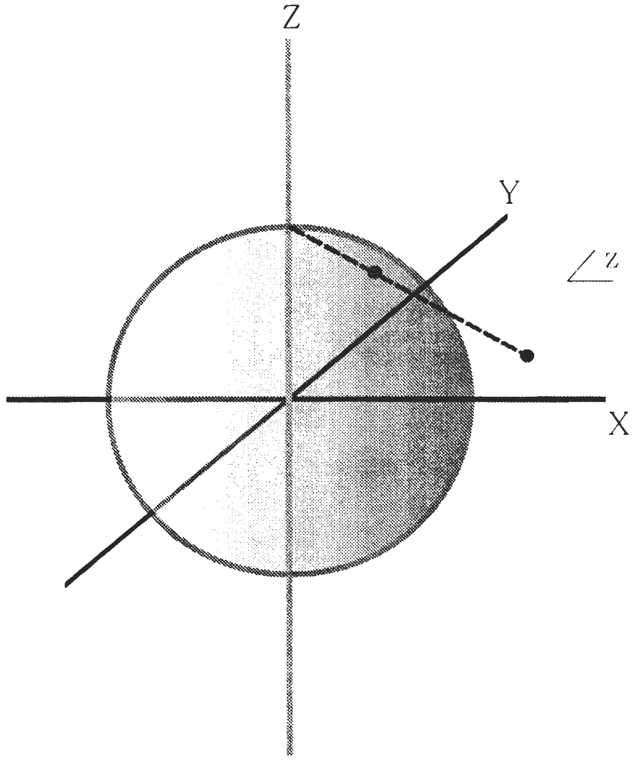


図 2: S^2 を複素 z 平面に立体射影する。ここでは $(X,Y,Z)=(0,0,1)$ から射影するので S^2 の $(0,0,-1)$ のまわりの近傍を考えていることになる。

の関係にあることがわかり、この X,Y,Z 同士の $*$ 積は (228) より

$$
\begin{aligned}
(X+iY)*(X+iY) &= 4\frac{\sqrt{(r^4-\hbar^2(1+r^2)^2)(1-\hbar^2(1+r^2)^2)}}{(1+r^2)^2}e^{2i\theta}, \\
(X-iY)*(X-iY) &= 4\frac{\sqrt{(r^4-\hbar^2(1+r^2)^2)(1-\hbar^2(1+r^2)^2)}}{(1+r^2)^2}e^{-2i\theta}, \\
(X+iY)*(X-iY) &= 4\frac{(r^2-\hbar(1+r^2))(1+\hbar(1+r^2))}{(1+r^2)^2}, \\
(X-iY)*(X+iY) &= 4\frac{(r^2+\hbar(1+r^2))(1-\hbar(1+r^2))}{(1+r^2)^2}, \\
Z*(X+iY) &= 2re^{i\theta}\frac{r^2-1+2\hbar(1+r^2)}{(1+r^2)^2}, \\
(X+iY)*Z &= 2re^{i\theta}\frac{r^2-1-2\hbar(1+r^2)}{(1+r^2)^2}, \\
Z*(X-iY) &= 2re^{-i\theta}\frac{r^2-1-2\hbar(1+r^2)}{(1+r^2)^2}, \\
(X-iY)*Z &= 2re^{-i\theta}\frac{r^2-1+2\hbar(1+r^2)}{(1+r^2)^2}, \\
Z*Z &= \left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)^2 = Z^2
\end{aligned}
\tag{233}
$$

と計算される。(§B.3 参照。) 特に uzzy sphere の半径の 2 乗はこの $*$ 積を用いれば

$$X * X + Y * Y + Z * Z = 1 - 4\hbar^2 \tag{234}$$

になり元の普通の可換な積による半径の 2 乗: $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ より $\mathcal{O}(\hbar^2)$ だけ小さくなっている。

また (233) より $*$ 積の交換関係は

$$[X^i, Y^j]_* = 4\hbar i\epsilon^{ijk}X^k, \qquad (X^1 := X, X^2 := Y, X^3 := Z) \tag{235}$$

となり $su(2)$ 代数を満たす。(ここで ϵ^{ijk} は 3 階完全反対称テンソルで $\epsilon^{123} = 1$ としている。) これは fuzzy sphere の代数として知られているものである。つまり、CP^1 の非可換な $*$ 積として定義した (228) は、$CP^1 \simeq S^2$ を非可換に変形したものが fuzzy sphere であるという描像と consistent であるということになる。

したがって (228) の $*$ 積を使って §6.3 のように構成した非可換ゲージ理論は fuzzy sphere 上のゲージ理論といえるかもしれない。[99]

8.5 7-brane 背景との比較

前節までに議論してきたものはそれ自身では弦理論と直接は関係ないものであるが、弦理論と非可換時空の関わりを調べたいという始めの動機からすると弦理論への応用が期待される。その観点からすると、似た状況として IIB 型超弦理論の 7-brane がつくる非自明な背景時空が思い当たる。それとの比較を少し考えてみよう。

IIB 型超弦理論の低エネルギー有効理論として IIB 型超重力理論が知られているが、その超対称性を半分保つ古典解として 7-brane 解が知られている。(前節までの状況では空間 2 次元分が非自明な背景に相当するのでここで 7-brane 背景を考える。) 特に 7-brane に直交する方向の 2 次元の計量が動径方向のみに依存する場合が (これは IIA 型の D8-brane と T 双対な 7-brane 解である。) 今の $*$ 積を露わに計算できる場合に対応しており、具体的には

$$\begin{aligned} ds_{\mathrm{E}}^2 &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^7)^2 + H(r)(dr^2 + d\theta^2), \\ \tau &= \pm H'(r)\theta + iH(r), \quad H(r)'' = 0 \end{aligned} \tag{236}$$

で与えられる解である。[24] ここで ds_{E}^2 は IIB 型の Einstein 計量であり、τ は IIB 型のディラトン ϕ, アキシオン χ を用いて $\tau = \chi + ie^{-\phi}$ と表されるもので、(236) 以外の場は零とする。(236) で適当に定数を再定義して $H(r) = r, \theta \sim \theta + 2\pi$ とすると 7-brane に直交する空間 2 次元部分の volume form は形式的には §8.2 と同じ $\Omega_0 = rdr \wedge d\theta$ になるので $*$ 積も (222) と同じものをとることができる。

[99] 非可換ゲージ不変な作用を書くためには $*$ 積だけでなく (182) のようにその $*$ 積に付随した trace も露わに計算して定義すべきであるが $*$ 積だけでも古典的な非可換な積での運動方程式、およびその古典解を議論することはできる。

ところで定数の g_{ij}, B_{ij} の背景のもとでの弦理論では§2でみたように大雑把にはMoyal積の非可換パラメータ θ^{ij} の部分はNSNS2-form場 B_{ij} の逆行列だった。つまり大体この定数B場をsymplectic formとみなした場合の $*$ 積である。これを逆に読むと今の場合 Ω_0 をB場に対応させることができると思われるが実際閉形式 $d\Omega_0 = 0$ であることから $B_{ij} = (\Omega_0)_{ij}$ としてもそれは超重力理論の運動方程式や超対称性を保つ条件に効いてこない。それらは $H = dB$ で表されており $H = 0$ なら B_{ij} が定数であってもなくても同じ事情だからである。

すなわち§2と同じ意味でIIB型超弦理論に結び付けようとすると上の状況では7-braneに直交する方向に開弦があってその端の非可換性が(213)の $*$ 積になるということになる。しかしそうするとD9 braneも存在してそこに非自明なB場があることになる。

いずれにせよ今の段階ではこの描像が正しいかどうかはっきりしたことは言えず、定数場でない非自明な背景のもとでの（超）弦理論との対応があるがどうかは更なる研究が必要である。

8.6 $*$ 積とfuzzy H^2

2次元の「円対称」な例として上では $CP^1 \simeq S^2$ を考えたが、これは2次元のRiemann多様体とみたとき、定曲率空間でもある。つまり断面曲率 K が正の定数という特徴をもつ。[29] 断面曲率が零なのは平坦な $\mathbb{R}^2$ で§8.2（および§7）で考えた。ここでは断面曲率が負の定数になる双曲空間 H^2 の場合を考えよう。[100]

H^2 は $\mathbb{R}^{1,2}$ 内[101]の2次元面

$$-(Y^0)^2 + (Y^1)^2 + (Y^2)^2 = -1, \qquad Y^0 > 0 \tag{239}$$

で表される。このとき $r \geq 1, \theta \sim \theta + 2\pi$ を用いて

$$Y^0 = \frac{r^2+1}{r^2-1}, \quad Y^1 = -\frac{2r}{r^2-1}\cos\theta, \quad Y^2 = -\frac{2r}{r^2-1}\sin\theta \tag{240}$$

というパラメトリゼーションをすると、計量は(213)で

$$e^{\Phi} = \frac{1}{(r^2-1)^2} \tag{241}$$

---

[100] ここで断面曲率 K が定数のとき K はRiemannテンソル $R_{\mu\nu\rho\sigma} := g_{\mu\lambda}(\partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\rho\nu})$ から

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = K\left(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}\right) \tag{237}$$

のように決まる量である。[29] 特に2次元で計量が共形的に平坦な(213)で $\Phi = \Phi(r)$ で表されているとき

$$K = e^{-\Phi}\left(-\frac{1}{2}\Phi'' - \frac{1}{2r}\Phi'\right) \tag{238}$$

で計算できる。そして S^2 の(226)の場合 $K = 4 > 0$ であり H^2 の(241)の場合 $K = -4 < 0$ である。

[101] 3次元Minkowski空間 $ds^2 = -(dY^0)^2 + (dY^1)^2 + (dY^2)^2$ のこと

としたものになり、[102]§8.1 と同じ状況になる。この volume form $\Omega_0 = \frac{r}{(r^2-1)^2} dr \wedge d\theta$ を symplectic form とみなすことにしよう。すると (220) より（再び簡単のため $A(r) = 0$ として）flat section は

$$a = Q(a_0(r, \theta)) = a_0 \left(\sqrt{\frac{r^2 - 2r(r^2-1)y^1}{1 - 2r(r^2-1)y^1}}, \theta + \frac{y^2}{r} \right) \tag{242}$$

で与えられる。したがってこの場合の H^2 上の $*$ 積は

$$\begin{aligned} & a_0(r, \theta) * b_0(r, \theta) \\ = \ & \left(a_0 \left(\sqrt{\frac{r^2 - 2r(r^2-1)y^1}{1 - 2r(r^2-1)y^1}}, \theta + \frac{y^2}{r} \right) \exp \left(-\frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^1} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^2} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^2} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^1} \right) \right) \right. \\ & \left. \cdot b_0 \left(\sqrt{\frac{r^2 - 2r(r^2-1)y^1}{1 - 2r(r^2-1)y^1}}, \theta + \frac{y^2}{r} \right) \right) \Bigg|_{y^1 = y^2 = 0} \end{aligned} \tag{243}$$

と表わされる。特に r, θ 同士の $*$ 積は

$$\begin{aligned} & r * r = r^2, \qquad \theta * \theta = \theta^2, \\ & r * \theta = r\theta - i\hbar \frac{(r^2-1)^2}{2r}, \quad \theta * r = r\theta + i\hbar \frac{(r^2-1)^2}{2r} \end{aligned} \tag{244}$$

となり非自明な交換関係は

$$[r, \theta]_* = -i\hbar \frac{(r^2-1)^2}{r} \tag{245}$$

である。

さて (239) のように H^2 を $\mathbb{R}^{1,2}$ に埋め込んだ 2 次元面とみたときの自然な $\mathbb{R}^{1,2}$ の座標 (Y^0, Y^1, Y^2) はこの $*$ 積のもとでどのように表されるのだろうか？ 実際 CP^1 と同様 §B.3 の

[102] §8.3.§8.4 の $CP^1 \simeq S^2$ のときと同じ規格化にするため ds^2 を $\frac{1}{4}$ 倍している。

ように計算することができて次のようになる：

$$
\begin{aligned}
(Y^1+iY^2)*(Y^1+iY^2) &= 4\frac{\sqrt{(r^4-\hbar^2(r^2-1)^2)(1-\hbar^2(r^2-1)^2)}}{(r^2-1)^2}e^{2i\theta}. \\
(Y^1-iY^2)*(Y^1-iY^2) &= 4\frac{\sqrt{(r^4-\hbar^2(1+r^2)^2)(1-\hbar^2(r^2-1)^2)}}{(1+r^2)^2}e^{-2i\theta}. \\
(Y^1+iY^2)*(Y^1-iY^2) &= 4\frac{(r^2+\hbar(r^2-1))(1+\hbar(r^2-1))}{(r^2-1)^2}, \\
(Y^1-iY^2)*(Y^1+iY^2) &= 4\frac{(r^2-\hbar(r^2-1))(1-\hbar(r^2-1))}{(r^2-1)^2}. \\
Y^0*(Y^1+iY^2) &= -2re^{i\theta}\frac{r^2+1-2\hbar(r^2-1)}{(r^2-1)^2}, \\
(Y^1+iY^2)*Y^0 &= -2re^{i\theta}\frac{r^2+1+2\hbar(r^2-1)}{(r^2-1)^2}, \\
Y^0*(Y^1-iY^2) &= -2re^{-i\theta}\frac{r^2+1+2\hbar(r^2-1)}{(r^2-1)^2}, \\
(Y^1-iY^2)*Y^0 &= -2re^{-i\theta}\frac{r^2+1-2\hbar(r^2-1)}{(r^2-1)^2}, \\
Y^0*Y^0 &= \left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2=(Y^0)^2.
\end{aligned}
\tag{246}
$$

これを用いると H^2 の定義式 (239) は非可換な座標の意味では

$$
-Y^0*Y^0+Y^1*Y^1+Y^2*Y^2=-(1-4\hbar^2) \tag{247}
$$

と変更される。特に右辺の定数が $\mathcal{O}(\hbar^2)$ だけずれている。つまり、この非可換な $*$ 積を用いて（§8.4 の fuzzy sphere と同様の意味で）fuzzy H^2 を記述できると思われる。ところで、この非可換座標 (Y^0,Y^1,Y^2) の交換関係は

$$
[Y^0,Y^1]=-4\hbar iY^2,\quad [Y^2,Y^0]=-4\hbar iY^1,\quad [Y^1,Y^2]=4\hbar iY^0 \tag{248}
$$

のように $su(1,1)\simeq o(1,2)$ の代数を成している。この代数は可換な普通の Riemann 多様体としての等長群である $O(1,2)$ の代数になっており、ちょうど §8.4 の fuzzy sphere 代数（$su(2)\simeq o(3)$）と対応するものになっている。

以上より (243) の $*$ 積を使って §6.3 のように構成した非可換ゲージ理論は H^2 を非可換な多様体へ変形した fuzzy H^2 上のゲージ理論といえるかもしれない。

9 Kähler 多様体の場合

今までは基本となる多様体として sympelctic 多様体 (M,Ω_0) を考え、その上に非可換な $*$ 積を設定して非可換ゲージ理論を考えた。変形量子化の問題としては symplectic 多様体から

出発するのは自然なことであるが曲がった時空を扱う物理としてはEinsteinの一般相対論のようにRiemann多様体を考えるが自然である。従って計量 g が入っていてしかもsymplectic構造が自然に入っており弦理論の背景としてもしばしば現れる多様体であるKähler多様体について考えることは、物理への応用において有効であろう。以下ではsymplectic多様体の一部であるKähler多様体の場合にFedosov流の $*$ 積を定義して具体的な計算例を挙げる。

9.1 Kähler多様体

ここではまず複素次元 n のKähler多様体 M のいろいろな量のconventionを定める。[103] 正則な座標を $z^i, i = 1 \cdots n$、反正則な座標を $z^{\bar{i}}, i = 1 \cdots n$ と書く事にする。特に $z^{\bar{i}} = \overline{z^i}$ の関係にある。[104]

M のKähler計量を

$$ds^2 = \mathrm{Re}\left(g_{i\bar{j}} dz^i \otimes dz^{\bar{j}}\right), \tag{249}$$

と書く。つまり $g_{i\bar{j}}$ はエルミート条件：[105]

$$g_{i\bar{j}} = \overline{g_{j\bar{i}}} \tag{250}$$

と可積分条件

$$\partial_k g_{i\bar{j}} = \partial_i g_{k\bar{j}}. \tag{251}$$

を満たすものとする。(従って局所的には $g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} K$ となるKähler potential K が存在する。)

M のsymplectic formを標準的にKähler formと同一視する：[106]

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{i}{2} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge dz^{\bar{j}}. \tag{252}$$

Poissonテンソルは

$$\Lambda = \frac{1}{2}\Lambda^{\mu\nu}\partial_\mu \wedge \partial_\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{i} g^{i\bar{j}}\right)\partial_i \wedge \partial_{\bar{j}}, \tag{253}$$

で定義する。ここで $g^{i\bar{k}} g_{j\bar{k}} = \delta^i_j$, $\Lambda^{\mu\nu} := -(\omega^{-1})^{\mu\nu} = -\omega^{\mu\nu}$ としている。また行列で書くと

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{(\mathrm{r})} & g^{(\mathrm{i})} \\ -g^{(\mathrm{i})} & g^{(\mathrm{r})} \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = J_\mu{}^\rho g_{\rho\nu} = \begin{pmatrix} -g^{(\mathrm{i})} & g^{(\mathrm{r})} \\ -g^{(\mathrm{r})} & -g^{(\mathrm{i})} \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{\mu\nu} = -\omega^{\mu\nu} \tag{254}$$

[103] これは主に [23] に基づくconventionである。

[104] 前節までの実座標は $x^\mu, \mu = 1 \cdots 2n$ と書いて、正則な座標とは $z^i = x^i + i x^{i+n}$ の関係にあるとする。

[105] $\Leftrightarrow g(JV, JW) = g(V, W)$.

[106] このとき (251) は $d\omega = 0$ と等価である。ここで $d = dz^i \partial_i + dz^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}}$, $\partial_i := \frac{\partial}{\partial z^i}$, $\partial_{\bar{i}} := \frac{\partial}{\partial z^{\bar{i}}}$ とした。またより一般には $\omega(V, W) = g(JV, W)$ で ω を定義する。ここで V, W は任意のベクトル場であり J は M の複素構造、g は M の計量である。

と表される。ただし $g_{i\bar{j}}=g^{(\mathrm{r})}_{ij}+ig^{(\mathrm{i})}_{ij}, g^{ij}=g^{ij}_{(\mathrm{r})}+ig^{ij}_{(\mathrm{i})}i,j=1\cdots n, g^{(\mathrm{r})}_{ij}, g^{(\mathrm{i})}_{ij}, g^{ij}_{(\mathrm{r})}, g^{ij}_{(\mathrm{i})}\in\mathbb{R}, \omega^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}; \mu,\nu=1,\cdots,2n$, で複素構造は標準的に

$$J_{\mu}{}^{\nu}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{255}$$

としている。またエルミート性 (250) から $g^{(\mathrm{r})}_{ij}=g^{(\mathrm{r})}_{ji}, g^{(\mathrm{i})}_{ij}=-g^{(\mathrm{i})}_{ji}, g^{ij}_{(\mathrm{r})}=g^{ji}_{(\mathrm{r})}, g^{ij}_{(\mathrm{i})}=-g^{ji}_{(\mathrm{i})}$ である。

9.2 Wick 型の $*$ 積

§5.1 では M の座標は実数にとっていたが今考えている Kähler 多様体の場合は複素座標 $z^i, z^{\bar{j}}$ を用いたほうが自然である。普通の可換な積を非可換な $*$ 積に変形するときも複素座標で書くときに見やすい表式にするには §5.1 の $*$ 積の定義を少し変えたほうがよい。以下で定義する $*$ 積（$*'$ と表記する。）は Wick 型と呼ばれるものであり、それに対し §5.1 で定義したものは Weyl 型と呼ばれる。

Weyl 代数束の section は複素座標で書くと

$$\begin{aligned}a &= \sum_{2k+p\geq 0,k\geq 0}\hbar^k\sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{p!q!}a_{k,\mu_1\cdots\mu_p,\nu_1\cdots\nu_q}y^{\mu_1}\cdots y^{\mu_p}\theta^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\nu_q}\\ &= \sum_{\substack{2k+p\geq 0,k\geq 0\\ p=p_1+p_2}}\hbar^k\sum_{\substack{q=0\\ q=q_1+q_2}}^{2n}\frac{1}{p_1!p_2!q_1!q_2!}a'_{k,i_1\cdots i_{p_1}\bar{i}_1\cdots\bar{i}_{p_2},j_1\cdots j_{q_1}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{q_2}}\\ &\quad\cdot w^{i_1}\cdots w^{i_{p_1}}w^{\bar{i}_1}\cdots w^{\bar{i}_{p_2}}\theta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{j_{q_1}}\wedge\theta^{\bar{j}_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\bar{j}_{q_2}}\end{aligned} \tag{256}$$

となる。L_x の正則座標を $w^i=y^i+iy^{i+n},\ i=1,\cdots,n$ で定義し、反正則座標は $w^{\bar{i}}=\overline{w^i}$ とする。ここで $\circ'$ 積を

$$\begin{aligned}a\circ' b &:= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k\Lambda'^{(k)}(a,b),\\ \Lambda'^{(k)}(a,b) &:= \frac{1}{k!}\left(\frac{4}{i}\right)^k g^{i_1\bar{j}_1}\cdots g^{i_k\bar{j}_k}\frac{\partial}{\partial w^{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial w^{i_k}}a\frac{\partial}{\partial w^{\bar{j}_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial w^{\bar{j}_k}}b\end{aligned} \tag{257}$$

のように定義する。つまり

$$a\circ' b=a\exp\left(2h\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial w^i}g^{i\bar{j}}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial w^{\bar{j}}}\right)b \tag{258}$$

とする。($\frac{\partial}{\partial w^i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}-i\frac{\partial}{\partial y^{i+n}}\right), \frac{\partial}{\partial w^{\bar{i}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}+i\frac{\partial}{\partial y^{i+n}}\right)$ である。)

特に $\circ'$ 積は実座標で書き直しても $\circ$ 積と異なることに注意しよう。(すなわち単に座標変換したものではない。) $\circ'$ 積は作用素の積とみなしたとき Weyl 順序に対応し、一方 $\circ$ 積は Wick 順序に対応している (§B.5 参照。) のでそれぞれ Weyl 型の積、Wick 型の積と呼ばれることがある。

$\circ$ 積と $\circ'$ 積は次のように等価な関係にある (§B.5)：

$$\begin{aligned} a \circ b &= S^{-1}\left((Sa) \circ' (Sb)\right) \\ S &= \exp\left(\hbar g^{i\bar{j}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial w^i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial w^{\bar{j}}}\right) \end{aligned} \tag{259}$$

$\circ'$ 積の交換子は

$$[a, b]' := a \circ' b - (-)^{(\deg a)(\deg b)} b \circ' a \tag{260}$$

と表記することにする。

$W(L, \mathcal{A})$ 上の基本となる接続 $\nabla = \nabla_L + \nabla_{\mathcal{E}}$ は今の座標系では

$$\begin{aligned} &\nabla a = da \\ &- \sum_{\substack{2k+p\geq 0 \\ p=p_1+p_2 \\ q_1, q_2}} \frac{\hbar^k}{(p_1-1)!p_2!q_1!q_2!} \Gamma^i{}_j \wedge a'_{k, i i_1 \cdots i_{p_1-1} \bar{i}_1 \cdots \bar{i}_{p_2}, j_1 \cdots j_{q_1} \bar{j}_1 \cdots \bar{j}_{q_2}} \\ &\cdot w^j w^{i_1} \cdots w^{i_{p_1-1}} w^{\bar{j}_1} \cdots w^{\bar{j}_{p_2}} \theta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_{q_1}} \wedge \theta^{\bar{j}_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\bar{j}_{q_2}} \\ &- \sum_{\substack{2k+p\geq 0 \\ p=p_1+p_2 \\ q_1, q_2}} \frac{\hbar^k}{p_1!(p_2-1)!q_1!q_2!} \Gamma^{\bar{i}}{}_{\bar{j}} \wedge a'_{k, i_1 \cdots i_{p_1} \bar{i} \bar{i}_1 \cdots \bar{i}_{p_2-1}, j_1 \cdots j_{q_1} \bar{j}_1 \cdots \bar{j}_{q_2}} \\ &\cdot w^{i_1} \cdots w^{i_{p_1}} w^{\bar{j}} w^{\bar{j}_1} \cdots w^{\bar{j}_{p_2-1}} \theta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_{q_1}} \wedge \theta^{\bar{j}_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\bar{j}_{q_2}} \\ &+ [\Gamma_{\mathcal{E}}, a]' \\ &= da - \Gamma^i{}_j w^j \frac{\partial}{\partial w^i} a - \Gamma^{\bar{i}}{}_{\bar{j}} w^{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial w^{\bar{i}}} a + [\Gamma_{\mathcal{E}}, a]' \end{aligned} \tag{261}$$

と表される。以下では $L = TM$ つまり $\theta^i = dz^i, \theta^{\bar{i}} = dz^{\bar{i}}$ とする。このようにおくことで symplectic 接続 ∇_L が Kähler 多様体の Riemann 接続として一意的に定まる。

このとき ∇_L の曲率は

$$\begin{aligned} \nabla_L^2 a &= \frac{i}{\hbar}[R_L, a]', \\ R_L &= \frac{i}{2} R_{i\bar{j}k\bar{l}} w^i w^{\bar{j}} dz^k \wedge dz^{\bar{l}}, \\ R_{i\bar{j}} &:= g_{i\bar{i}} \left(d\Gamma^{\bar{i}}{}_{\bar{j}} + \Gamma^{\bar{i}}{}_{\bar{k}} \wedge \Gamma^{\bar{k}}{}_{\bar{j}}\right) = R_{i\bar{j}m\bar{l}} dz^m \wedge dz^{\bar{l}} \\ &= \left(\partial_m \partial_{\bar{l}} g_{i\bar{j}} - g^{k\bar{k}} \partial_m g_{i\bar{k}} \partial_{\bar{l}} g_{k\bar{j}}\right) dz^m \wedge dz^{\bar{l}}, \\ R_{i\bar{j}m\bar{l}} &= \partial_m \partial_{\bar{l}} g_{i\bar{j}} - g^{k\bar{k}} \partial_m g_{i\bar{k}} \partial_{\bar{l}} g_{k\bar{j}}, \\ \Gamma^i{}_j &= g^{i\bar{k}} \partial_l g_{j\bar{k}} dz^l = g^{i\bar{k}} \partial_j g_{l\bar{k}} dz^l, \\ \Gamma^{\bar{i}}{}_{\bar{j}} &= g^{k\bar{i}} \partial_{\bar{l}} g_{k\bar{j}} dz^{\bar{l}} = g^{k\bar{i}} \partial_{\bar{j}} g_{k\bar{l}} dz^{\bar{l}} \end{aligned} \tag{262}$$

と表される。特に今 Kähler 多様体なので曲率テンソルに

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -R_{i\bar{j}\bar{l}k} = -R_{\bar{j}ik\bar{l}} = R_{\bar{j}i\bar{l}k} = R_{k\bar{l}i\bar{j}} = R_{i\bar{l}k\bar{j}} \tag{263}$$

の対称性があることに注意する。

次数を上げ下げする作用素 δ, δ^{-1} (79) は

$$\begin{aligned} \delta a &= \left(dz^i \frac{\partial}{\partial w^i} + dz^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial w^{\bar{i}}} \right) a = -\frac{i}{\hbar}[\tilde{\delta}, a]', \\ \tilde{\delta} &= \frac{i}{2}\left(g_{i\bar{j}} w^i dz^{\bar{j}} - g_{i\bar{j}} w^{\bar{j}} dz^i \right), \\ \delta^{-1} &= \begin{cases} (w^i I(\partial_i) + w^{\bar{i}} I(\partial_{\bar{i}}))\frac{1}{p_w + p_{\bar{w}} + q_1 + q_2} & (p_w + p_w + q_1 + q_2 \neq 0) \\ 0 & (p_w + p_{\bar{w}} + q_1 + q_2 = 0) \end{cases} \end{aligned} \tag{264}$$

と書き換えられ（ただし $p_w, p_{\bar{w}}$ は $w, \bar{w}$ の次数、q_1, q_2 は $dz^i, dz^{\bar{i}}$ の次数とする）(80) を満たす。[107]

$W(L, \mathcal{A})$ の一般化した接続 D' は

$$\begin{aligned} D'a &= \nabla a + \frac{i}{\hbar}[\gamma', a]' = \nabla a - \delta a + \frac{i}{\hbar}[r', a]', \\ \gamma' &= \tilde{\delta} + r' \end{aligned} \tag{265}$$

と表すことにする。このとき D の曲率 Ω は

$$\begin{aligned} D'^2 a &= \frac{i}{\hbar}[\Omega, a]', \\ \Omega &= R + \nabla\gamma' + \frac{i}{\hbar}\gamma' \circ' \gamma' = \Omega_0 + R - \delta r' + \nabla r' + \frac{i}{\hbar} r' \circ' r', \\ R &= R_L - i\hbar R_{\mathcal{E}}, \\ \Omega_0 &= -\omega, \\ R_{\mathcal{E}} &= d\Gamma_{\mathcal{E}} + \Gamma_{\mathcal{E}} \wedge \Gamma_{\mathcal{E}} \end{aligned} \tag{266}$$

と表される。

特に Abelian connection を与える r' は

$$\begin{aligned} &\delta r' = R - \Omega_1 + \nabla r' + \frac{i}{\hbar} r' \circ' r', \\ &\delta^{-1} r' = \mu \end{aligned} \tag{267}$$

つまり

$$r' = \delta\mu + \delta^{-1}(R - \Omega_1) + \delta^{-1}\left(\nabla r' + \frac{i}{\hbar} r' \circ' r' \right). \tag{268}$$

---

[107] ただし $\deg_a = q_1 + q_2$ とする。

により定まり flat section $W_D = \mathrm{Ker} D \cap W(L, \mathcal{A})$ は以前と同様に

$$
\begin{aligned}
D'a &= 0,\ a \in W(L, \mathcal{A}) \\
\Leftrightarrow a &= a_0 + \delta^{-1}(D' + \delta)a,\ a_0 := \sigma(a) = a|_{w^i = w^{\bar{j}} = 0} \\
\Leftrightarrow a &= Q'(a_0) := \sum_{k=0}^{\infty} (\delta^{-1}(D' + \delta))^k a_0
\end{aligned} \tag{269}
$$

となり変形量子化の条件を満たす $*'$ 積は

$$
a_0 *' b_0 = \sigma(Q'(a_0) \circ' Q'(b_0)) \tag{270}
$$

で定義される。

9.3 r' の非自明な厳密解

M として affine locally symmetric な Kähler 多様体の特別な場合を考えよう。この場合 Abelian connection D' を与える r' が Tamarkin[25][108]により厳密に解かれている。

ここで affine locally symmetric とは M の affine 接続 ∇ が捩率テンソル T が零でかつ曲率テンソル R の 共変微分が零の場合である。[28] 今の Kähler の場合で前節のように接続 Γ を定めた場合、捩率はもともと零なので affine locally symmetric であることで新たに課される条件としては

$$
\nabla_m R_{i\bar{j}k\bar{l}} = 0 \tag{271}
$$

ということになる。このとき特に $\Gamma_{\mathcal{E}} = 0$ として

$$
\begin{aligned}
\mu &= -\frac{i}{16} R_{k\bar{l}m\bar{n}} w^k w^m w^{\bar{l}} w^{\bar{n}} \\
\Omega_1 &= 0
\end{aligned} \tag{272}
$$

という背景を考えると Abelian connnection D' を与える r' は

$$
r' = -\frac{i}{4} R_{k\bar{l}m\bar{n}} w^k w^{\bar{l}} w^{\bar{n}} dz^m \tag{273}
$$

となる。

実際 (271) の条件から $\nabla r' = 0$ が成り立ち、また (271) から導かれる曲率テンソルの恒等式:

$$
R_{p\bar{l}m\bar{n}} g^{p\bar{q}} R_{i\bar{q}k\bar{j}} - R_{p\bar{j}i\bar{l}} g^{p\bar{q}} R_{m\bar{q}k\bar{n}} + R_{p\bar{l}k\bar{n}} g^{p\bar{q}} R_{m\bar{q}i\bar{j}} - R_{p\bar{j}i\bar{n}} g^{p\bar{q}} R_{m\bar{q}k\bar{l}} = 0 \tag{274}
$$

を用いると $r' \circ r' = 0$ となることがわかり、この厳密解は漸化式 (268) において $\nabla r' + \frac{i}{\hbar} r' \circ' r' = 0$ より iteration が最初だけで終わる場合になっている。

[108] [25] の原論文では convention がかなり違うがここでの言葉に直すと以下のようになる。

ただし、r' が厳密に求まっても §7 の定数背景の場合のように $*'$ 積まで露わに計算できるわけではない。r' が $w,\bar{w}$ の 3 次式なので Q' の計算が依然として大変だからである。[109] 実際この r' (273) のもとで flat section を定める式 $Da=0$ は

$$
\begin{aligned}
&dz^k\Bigg(\partial_k a-\left(\delta^i_k+\Gamma^i_{jk}w^j+R_{k\bar{l}m\bar{n}}w^m w^n g^{i\bar{l}}\right)\frac{\partial}{\partial w^i}a\\
&+\frac{1}{2}R_{k\bar{l}m\bar{n}}w^{\bar{l}}w^{\bar{n}}g^{m\bar{j}}\frac{\partial}{\partial w^{\bar{j}}}a-\hbar R_{k\bar{l}m\bar{n}}w^m g^{p\bar{l}}g^{q\bar{n}}\frac{\partial}{\partial w^p}\frac{\partial}{\partial w^q}a\Bigg)\\
&+dz^{\bar{k}}\left(\partial_{\bar{k}}a-\left(\delta^{\bar{i}}_{\bar{k}}+\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}w^{\bar{j}}\right)\frac{\partial}{\partial w^{\bar{i}}}a\right)=0
\end{aligned}
\tag{275}
$$

となういうやや複雑な方程式になっておりこれを解くことで Q' が求まる。[110]

このような M の例として典型的なものは CP^n が挙げられる。CP^n の斉次座標を $(Z^0:Z^1:\cdots:Z^n)$ としたとき $(1:0:\cdots:0)$ の近傍で $z^s=\frac{Z^S}{Z^0}, s=1,\cdots,n$ という座標を考えると Kähler 計量を与える Kähker potential は標準的に $K=\log(1+z^s z^{\bar{s}})$ で与えられ (Fubini-Study 計量) このとき

$$
\begin{aligned}
\Gamma^k{}_{lm}&=-\frac{\delta^k_m z^{\bar{l}}+\delta^k_l z^{\bar{m}}}{1+|z|^2},\quad \Gamma^{\bar{k}}{}_{\bar{l}\bar{m}}=-\frac{\delta^k_m z^l+\delta^k_l z^m}{1+|z|^2},\\
R_{k\bar{l}m\bar{n}}&=-\frac{\delta^n_k\delta^l_m+\delta^l_k\delta^n_m}{(1+|z|^2)^2}+\frac{\delta^n_k z^l z^{\bar{m}}+\delta^l_k z^n z^{\bar{m}}+\delta^l_m z^n z^{\bar{k}}+\delta^n_m z^l z^{\bar{k}}}{(1+|z|^2)^3}-\frac{2z^l z^n z^{\bar{k}} z^{\bar{m}}}{(1+|z|^2)^4}
\end{aligned}
\tag{276}
$$

を用いると (273) は

$$
r'=-\frac{i}{2}\left(-\frac{w^s w^{\bar{s}} w^{\bar{m}}}{(1+z^t z^{\bar{t}})^2}+\frac{(w^s w^{\bar{s}})(z^t w^{\bar{t}})z^{\bar{m}}+|z^s w^{\bar{s}}|^2 w^{\bar{m}}}{(1+z^u z^{\bar{u}})^3}-\frac{|z^s w^{\bar{s}}|^2(z^t w^{\bar{t}})z^{\bar{m}}}{(1+z^u z^{\bar{u}})^4}\right)dz^m \tag{277}
$$

と計算される。

上の例で最も簡単な $n=1$ つまり CP^1 のとき (275) より $z,\bar{z}$ の flat section を与える式 (275) は

$$
\begin{aligned}
&dz\left(\partial a-\left(1-2\frac{\bar{z}w}{1+|z|^2}-\frac{2|w|^2}{(1+|z|^2)^2}\right)\frac{\partial a}{\partial w}-\frac{\bar{w}^2}{(1+|z|^2)^2}\frac{\partial a}{\partial\bar{w}}+2\hbar w\frac{\partial^2 a}{\partial w^2}\right)\\
&+d\bar{z}\left(\bar{\partial}a-\left(1-\frac{2z\bar{w}}{1+|z|^2}\right)\frac{\partial a}{\partial\bar{w}}\right)=0
\end{aligned}
\tag{278}
$$

[109] §7 の定数背景の場合は r が y の 1 次式だったので計算を全て露わに遂行できた。

[110] もちろん y の無限次を含む一般的な r (あるいは r') の場合の flat section を定める式 $Da=0$ は y の無限階微分を含む式でになっており微分方程式としては更に複雑である。その解は一般に形式的には (269) で表現されているが、露わな表式は初期条件を与えた微分方程式とみなすほうが扱いやすい場合がある。実際 §7§8 ではこのようにして flat section を計算した。

となるので $z, \bar{z}$ に対応する flat section についてこれを解くと

$$
\begin{aligned}
Q'(z) &= z + w + \frac{1+2\hbar}{1+|z|^2}\bar{z}w^2 + \frac{1}{(1+|z|^2)^2}(\bar{z}^2 w^3 + w^2\bar{w}) \\
&\quad + \frac{1}{(1+|z|^2)^3}(\bar{z}^3 w^4 + 2\bar{z}w^3\bar{w}) + (\deg \geq 5), \\
Q'(\bar{z}) &= \bar{z} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+|z|^2}\right)^k \bar{w}^{k+1} = \bar{z} + \frac{1+|z|^2}{1+|z|^2 - z\bar{w}}\bar{w}
\end{aligned}
\tag{279}
$$

となる。特に $Q'(\bar{z})$ の表式は厳密解でありこれが w に依存しないことに注意すると $*'$ 積の定義 (270) から $\bar{z} * \bar{z} = \bar{z}^2$ つまり普通の積と一致する。しかし $Q'(z)$ の表式は w と $\bar{w}$ 混じった複雑な表式をしており、それらの $*'$ 積 $z *' z$ の計算は難しいが $Q'(z)$ の w 依存性は

$$
Q'(z) = z + w + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-2}(2\hbar)^k\left(\frac{\bar{z}}{1+|z|^2}\right)^{n-k-1} c_{n,k}w^{n-k} + \mathcal{O}(\bar{w}) \tag{280}
$$

のように計算できる。ここで $c_{n,k}$ は

$$
c_{n+1,k} = c_{n,k} + (n-k)c_{n,k-1}, \quad c_{n,0} = c_{n,n-2} = 1 \tag{281}
$$

で再帰的に定義される数である。したがって z と $\bar{z}$ 同士の $*'$ 積は計算できて

$$
\begin{aligned}
z *' \bar{z} &= z\bar{z} + 2\hbar(1+|z|^2)^2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2\hbar)^n \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)!c_{n+1,n-l}|z|^{2l}\right), \\
\bar{z} *' z &= \bar{z}z
\end{aligned}
\tag{282}
$$

となる。[111] z と $\bar{z}$ についてこのように非対称な積になっているのは今 Abelian connection として Tanarkin の解、つまり (272) という w と $\bar{w}$ について非対称なパラメトリゼーションをとったからである。また (282) と (231) を比較してわかるように、この Tamarkin の解 (273) による $*'$ 積および交換関係は §8.3 で求めた CP^1 の $*$ 積とは異なるものである。ただし当然ながら交換関係の leading である $\mathcal{O}(\hbar)$ の項はともに Fubini-Study 計量から定まる 2 次元の volume form を symplectic form とみなした Poisson 括弧と一致するものである。(符号が違うのは convention の違いである。)

[111] この式から $z *' \bar{z}$ は普通の意味では発散する級数であるが $\hbar$ の形式的冪級数としては意味をもつ。すなわち $\hbar$ の各冪の係数は有限和である。

10 まとめと展望

本論文では非可換ゲージ理論の一端を議論してきた。

§3 ではB場が定数の場合に対応する非可換ゲージ理論において、gauge equvalence relation だけから決まる 異なる θ^{ij} の上の非可換ゲージ場間の変換 (Seiberg-Witten map) について議論した。そこで元の [3] で提唱された変換自身には不定性があることを示した。またこの不定性は、[3] で議論されている非可換 Born-Infeld 作用を不変に保つという性質には（それ自身が意味をもつ $\mathcal{O}(\partial F)$ を無視する近似の範囲内では）効かないということも議論した。

§6 では Fedosov の $*$ 積の構成法に付随する形で一般の symplectic 多様体上非可換ゲージ理論の構成を試みた。また、§7 以降ではその構成に不可欠な $*$ 積の計算例を露わな形で示した。

§5 で紹介したように Fedosov の $*$ 積の構成法においては、元になる symplectic 多様体 (M, Ω_0)（および $(L,\omega), \nabla_L, \nabla_{\mathcal{E}}$ ）を固定してもなお Ω_1 および μ というパラメータの自由度が入り得る形になっている。 Ω_1 は $\nabla_{\mathcal{E}}$ の曲率 R_E の単位行列に比例する部分との和の形で r などに入っているので (84)、その $\hbar$ 変形の自由度とみなすこともできるが、μ はそれらとは独立なパラメータで大きな自由度を持っている。μ の自由度は $*$ 積の定義で一旦 Weyl 代数束 $W(L,\mathcal{A})$ を考えるときに自然に入ってくる自由度であり、その $*$ 積への寄与は非常に複雑な形をしている。[112] 本論文の非可換ゲージ理論の構成法ではこれらのパラメータは非可換ゲージ場が住んでいる「背景」（あるいは Weyl 代数束の言葉では flat section）を決めるものである。その意味では μ のような M の座標にも依存してよい任意パラメータが入りうることは非常に多彩な非自明な背景を記述し得るということになる。

§1 でも述べたように Moyal 積でないような一般の $*$ 積を考えたのは、B場（および計量 g_{ij} など）が定数でないような非自明な背景での弦理論の非可換な記述を目指そうという動機があったからであり、§6.3 で構成した非可換ゲージ理論の一般化がその候補になっているかもしれない。もしそうだとすると上で述べた任意パラメータ μ などに弦理論の非自明な背景の情報（g_{ij} 依存性など）が埋め込まれているということになるだろう。ところで μ は一般に y^i の形式的冪級数で表わされるものなので、その各 y^i の冪の係数の場として対称テンソルを無限個含み得る形 になっている。一方、弦理論の立場でも massive mode を含めれば2階対称テンソルの計量 g_{ij} だけでなく対称テンソル場を無限個含むので μ と対応させることができるかもしれない。ただし、弦理論では反対称テンソル場も同様に含まれているが、本論文の構成法では背景に入り得る自由度としてそれに直接対応しているようなものはない。しかし、例えば Bordemann[30] による Fedosov の構成法 [9] の更なる一般化、すなわち Weyl 代数束 $W(L,\mathcal{A})$ を更に一般化して適当な Grassmann 代数束 $\wedge E$ も含めた $W(L,\mathcal{A},\wedge E)$ を考えれば形式的には反対称テンソルを背景に含むようにできるかもしれない。

このようにみてくると一般の symplectic 多様体上に $*$ を構成するための処方箋として一見人為的に導入した Weyl 代数束には弦理論の立場から物理的に意味を持たせることができるかもしれないというほのかな期待が湧いてくる。例えば本論文での一般に異なる flat section をつなぐ "gauge transformation" が、弦の場の理論におけるゲージ変換 [31] に対応しているかも

[112] 低次の項でさえ (139)(141)(142) のように。

しれない。[113]§6.3では普通の意味での非可換ゲージ理論と自由度を対応させるために、§6.2.1のWeyl代数束上のゲージ場に適当に制限をつけて非可換ゲージ場を定義したが、Weyl代数束自身に意味を持たせることができればこのように制限する必然性はなくなり、y^iの冪の係数場の分だけ非常に多くの自由度をもったゲージ場を扱うことになる。[114]また本論文での$\hbar$つまり変形量子化の変形パラメータと弦理論のα'が何かしら関係している気がしないでもない。[115]

これらの非常に楽観的な期待が果たして正しいのかどうかはきちんと調べないとわからないことであり現段階では単なる妄想にすぎない。将来まじめに調べたとき、実は弦理論との関連があるとはとても言い難いということになるかもしれないが、本論文で行った考察は弦理論とは独立な物理の模型としての非可換ゲージ理論の一般化を試みたという意味でも有意義なものであると信じる。弦理論と関連していてもいなくても非可換場の理論自身まだまだ研究の途中の段階で、何が物理的に重要なのか模索の段階であると思う。本論文では非可換ゲージ理論の一般化の「古典論」を考察したのであるがこれを量子場の理論にすることも更なる課題であろう。[116]

謝辞

本論文の元になる発表論文[1],[2]作成時において共同研究してくださった浅川嗣彦氏に感謝します。また本論文と関連した内容について議論してくださった石橋延幸氏、奥山和美氏、大川祐司氏、池田憲明氏、川野輝彦氏、高橋智彦氏、寺嶋靖治氏、橋本幸士氏、今井慎一氏、森山翔文氏、およびE-mailで重要なコメントをくださったEdward Witten氏、M. M. Sheikh-Jabbari氏、に感謝します。

ゼミや講義で「素粒子論」を教えて下さり、適切なアドバイスをくださったり、研究を温かく見守ってくださった（元）京都大学理学部素粒子論研究室スタッフの益川敏英氏、九後太一氏、川合光氏、畑浩之氏、矢彦沢茂明氏、菊川芳夫氏、前川展祐氏、笹倉直樹氏、小林達夫氏に感謝します。ゼミや文献紹介等で日常的に研究面で刺激を与えてくださった京都大学理学部素粒子論研究室の皆様およびOG・OBの坂東昌子氏、武藤知巳氏、谷口裕介氏、今村洋介氏、原野敏幸氏、小田肇氏、杉本茂樹氏、中井悦司氏、平山貴之氏、吉岡興一氏、石村直也氏に感謝します。インフォーマルセミナー等を通じていろいろなことを教えてくださった京都大学基礎物理学研究所の皆様、その他精神面で支えてくださった同期の須山孝夫氏、植松俊一郎氏にも感謝します。

[113]弦の場の理論のゲージ変換を系統的に記述するBatalin-Vilkovisky形式の一般論ではfermionicなsymplectic form ωを持つsupermanifoldを考え、ωからanti-bracketを定義して定式化していくのであるが、これは古典力学でphase space上に(bosonicな)symplectic formを与えてPoisson括弧を定義するのと似ている。後者の変形量子化を本論文では用いたのであるが、前者のそれに対応するものはあるのだろうか？まじめに考えると弦の場の理論との対応がわかるかもしれない。

[114]非可換幾何学と弦の場の理論との関係はE. Wittenによりすでに[6]においても指摘されているが、ここで期待する対応はもっと非自明なものである。

[115]本来の変形量子化のように$\hbar$は実は量子重力のPlanck定数そのものであるかもしれないが。

[116]そもそも量子化する必要があるのか、それはどういう物理的意味をもつのかという議論も必要であろう。

A　symplectic 多様体

ここでは symplectic 多様体の定義とその性質などをまとめておこう。[117]

notation

特に断らない限り添え字の対称化、反対称化の記号を

$$
\begin{aligned}
X_{(i_1\cdots i_n)} &:= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} X_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_n)}, \\
X_{[i_1\cdots i_n]} &:= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\sigma X_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_n)}
\end{aligned}
\tag{283}
$$

とする。($\frac{1}{n!}$ で割っていることに注意。) ここで $\mathfrak{S}_n$ は n 次の対称群。間に対称化（反対称化）に参加しない添字がある場合は | | で囲むことにする。例えば

$$
X_{(ij|kl|m)npq} = \frac{1}{3!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} X_{\sigma(i)\sigma(j)kl\sigma(m)npq}
\tag{284}
$$

また、黙って Einstein の規約をとることも多い：

$$
T^{i_1,\cdots,k,\cdots,i_m}{}_{j_1,\cdots,k,\cdots,j_l} := \sum_k T^{i_1,\cdots,k,\cdots,i_m}{}_{j_1,\cdots,k,\cdots,j_l}.
\tag{285}
$$

多様体 M の接束 TM の k 次外積代数を $\Omega^k M$ と書き、 $\Omega M = \sum_{k=1}^n \Omega^k M$ の元を多重ベクトル場と呼ぶ。

A.1　Poisson 多様体

n 次元多様体 M に 2 重ベクトル場 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha^{ij}\partial_i\wedge\partial_j$ で

$$
\begin{aligned}
\alpha^{ij} &= -\alpha^{ji}, \\
\alpha^{l[i}\partial_l\alpha^{jk]} &= 0
\end{aligned}
\tag{286}
$$

を満たすものが与えられているとき (M,α) を Poisson 多様体という。この α を Poisson テンソルと呼ぶこともある。

Poisson 多様体には Poisson 括弧 $[\ ,\ ]_{\mathrm{P.b.}}: C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ が定義できる：

$$
[f,g]_{\mathrm{P.b.}} := \alpha^{ij}\partial_i f\partial_j g,\quad f,g\in C^\infty(M).
\tag{287}
$$

[117] symplectic 多様体に関連することは例えば [26] が参考になる。

このとき次の性質が成り立つ：[118]

$$
\begin{aligned}
&[f, g]_{\mathrm{P.b.}} = -[g, f]_{\mathrm{P.b.}}, \\
&[f, [g, h]_{\mathrm{P.b.}}]_{\mathrm{P.b.}} + [g, [h, f]_{\mathrm{P.b.}}]_{\mathrm{P.b.}} + [h, [f, g]_{\mathrm{P.b.}}]_{\mathrm{P.b.}} = 0, \\
&[f, gh]_{\mathrm{P.b.}} = [f, g]_{\mathrm{P.b.}} h + g[f, h]_{\mathrm{P.b.}} .
\end{aligned}
\tag{288}
$$

特に第2式の Jacobi 恒等式は $\alpha^{l[i}\partial_l \alpha^{jk]} = 0$ から従う。

A.2 symplectic 多様体

2n 次元多様体 M に非退化な closed 2-form ω が与えられているときつまり、

$$d\omega = 0, \ \omega^n \neq 0 \tag{289}$$

のなる symplectic 構造 ω が与えられているとき (M, ω) を symplectic 多様体という。
$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ と書いたとき、非退化条件より ω_{ij} の逆行列 $(\omega^{-1})^{ij} := \omega^{ij}$ が存在し、Poisson 括弧を

$$[f, g]_{\mathrm{P.b.}} := \omega^{ij}\partial_i f \partial_j g \tag{290}$$

で定義できる。このとき Jacobi 恒等式は 2-form ω が closed であることから

$$\partial_{[i}\omega_{jk]} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \omega^{l[i}\partial_l \omega^{jk]} = 0 \tag{291}$$

により成り立つ。

A.3 Fedosov 多様体

symplectic 多様体 (M, ω) に symplectic 接続 Γ を入れた (M, ω, Γ) を Fedosov 多様体とよぶ。[27] ここで Γ が symplectic 接続とは、Γ が symplectic 構造 ω を保つ、すなわち

$$\nabla_k \omega_{ij} := \partial_k \omega_{ij} - \omega_{lj}\Gamma^l{}_{ik} - \omega_{il}\Gamma^l{}_{jk} = 0 \tag{292}$$

を満たすものである。さらに Γ は捩率 T が零という条件を課すことも多い：[119]

$$T^i{}_{jk} := \Gamma^i{}_{kj} - \Gamma^i{}_{jk} = 0. \tag{293}$$

symplectic 接続は Riemann 多様体 (M, g) の Riemann 接続と違い以上の条件だけでは Γ は一意的には決まらない。[120] symplectic 多様体の場合、$\Gamma_{ijk} := \omega_{il}\Gamma^l{}_{jk}$ という記号を使う場合

[118] つまり $[\ ,\ ]_{\mathrm{P.b.}}$ は Poisson 構造を与える。

[119] これは §A.4 の記号で $d\theta^i = 0$ となる基底の場合。

[120] Riemann 多様体 (M, g) の場合は接続 Γ が Riemann 計量 g を保つという条件
$\nabla_k g_{ij} := \partial_k g_{ij} - \Gamma^l{}_{ki} g_{lj} - \Gamma^l{}_{kj} g_{il} = 0$ と捩率が零 $\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$ という条件から Riemann 接続が計量から一意的に決まった：$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}(\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk})$. Riemann 多様体のときは対称な $g_{ij} = g_{ji}$ が与えられていたのに対し、symplectic 多様体のときは反対称な $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ が与えられているので事情が違っている。

がある。捩率が零という条件は $\Gamma_{jik}=\Gamma_{ijk}$ という対称性を表し、またDarboux座標（つまり $\partial_k\omega_{ij}=0$ となる座標系）の場合 $\nabla_k\omega_{ij}=0$ という条件から $\Gamma_{ijk}=\Gamma_{kji}$ となり捩率零条件と合わせて Γ_{ijk} は完全対称になる。このことに注意すれば一般に同じ ω を保つ二つの接続の差 $\Gamma_{ijk}-\Gamma'_{ijk}$ は3階完全対称テンソルになっていることがわかる。（ちなみにRiemann多様体の場合のこれの相当物は零である。）したがって、symplectic構造 ω を保ち捩率零の接続の選び方は ${}_{2n+2}C_3=\frac{2(n+1)(2n+1)n}{3}$ 次元の関数自由度だけある。

A.4　公式

一般的なテンソルの表式を書いておこう。

$$\begin{aligned}
T(X,Y) &= \nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y], \quad \text{(torsion)}\\
\mathcal{R}(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z, \quad \text{(curvature)}\\
Z(\omega(X,Y)) &= \omega(\nabla_ZX,Y)+\omega(X,\nabla_ZY). \quad \text{(symplectic connection)}
\end{aligned} \tag{294}$$

ベクトル場のある基底 X_i とその双対基底 θ^i に対し接続形式、捩率形式、曲率形式、をそれぞれ $\Gamma^i{}_j, T^i, R^i{}_j$ とすると

$$\begin{aligned}
\nabla_iX_j &= \Gamma^l{}_{ji}X_l,\\
\Gamma^i{}_j &= \Gamma^i{}_{jk}\theta^k,\\
T^i &= d\theta^i+\Gamma^i{}_j\wedge\theta^j,\\
R^i{}_j &= d\Gamma^i{}_j+\Gamma^i{}_k\wedge\Gamma^k{}_j
\end{aligned} \tag{295}$$

の関係にある。

これからBianchi恒等式は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
&R^i{}_j\wedge\theta^j=dT^i+\Gamma^i{}_j\wedge T^j,\\
&dR^i{}_j+\Gamma^i{}_k\wedge R^k{}_j-R^i{}_k\wedge\Gamma^k{}_j=0
\end{aligned} \tag{296}$$

とくに§5.1の場合には(78)(79)で定義されるものに対しては

$$\begin{aligned}
\delta R &= y^i\omega_{ij}(dT^j+\Gamma^j{}_k\wedge T^k),\\
\nabla R &= \nabla_LR=0
\end{aligned} \tag{297}$$

が成り立つ。

B　$*$ 積の諸性質

B.1　$*$ 代数における derivation

非可換な $*$ 積が定義された代数における derivation を考える。

ここで代数 $(\tilde{A}, \tilde{*})$ 上の作用素 $\tilde{\partial}: \tilde{A} \to \tilde{A}$ が derivation であるとは

$$\tilde{\partial}(a+b) = \tilde{\partial}a + \tilde{\partial}b,\ \tilde{\partial}(a\tilde{*}b) = (\tilde{\partial}a)\tilde{*}b + a\tilde{*}\tilde{\partial}b,\quad \forall a, b \in \tilde{A} \tag{298}$$

を満たすということである。

x^μ の関数の積が普通の Moyal 積の場合は $* = \exp\left(\frac{i}{2}\vartheta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\mu}\overrightarrow{\partial_\nu}\right)$ で $\vartheta^{\mu\nu}$ が定数なので可換な積の場合と同様に x^μ の微分 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ は derivation になっている。しかし一般に §5 で構成した $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ において ∂_μ は derivation になっていない。(ちなみに $\nabla_{L\mu}$ は $(W_D, \circ)$ の derivation になっているが $*$ 積の derivation にはなっていない。)

そこで $W(L, \mathcal{A})$ の inner derivation から W_D の derivation を構成し、それに σ を作用させて対応する $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ の derivation を導こう。[121]

$\hbar = 0$ としたとき単位行列に比例する[122] 任意の $K \in W(L, \mathcal{A})$ に対し作用素 $\hat{\partial}_K : W(L, \mathcal{A}) \to W(L, \mathcal{A})$ を

$$\hat{\partial}_K a := \frac{i}{\hbar}[K, a],\quad a \in W(L, \mathcal{A}) \tag{299}$$

のように定義する。これは K から定まる $W(L, \mathcal{A})$ の inner derivation である。この $\hat{\partial}_K$ が $(W_D, \circ)$ 上でも derivation であるためには

$$D(\hat{\partial}_K a) = D\left(\frac{i}{\hbar}[K, a]\right) = \frac{i}{\hbar}[DK, a] + \frac{i}{\hbar}[K, Da] = \frac{i}{\hbar}[DK, a],\ \forall a \in W_D \tag{300}$$

より

$$[DK, a] = 0,\quad \forall a \in W_D, \tag{301}$$

が要求される。これは DK が W_D の central 1-form であるという条件であるが実は DK が $W(L, \mathcal{A}$ の central 1-form であるという条件と同値であることが示されている。[9] 従って ∂_K が W_D の dearivation であるとき

$$DK = \Theta,\quad \Theta \in Z \otimes \wedge^1. \tag{302}$$

と書ける。D が Abelian connection であることから, $d\Theta = D\Theta = D^2K = 0$ つまり Θ が closed 1-form であることがわかり局所的に $\Theta = d\Phi$ なる $\Phi \in Z$ が存在し (302) は $D(K - \Phi) = 0$ あるいは $K - \Phi \in W_D$ となる。したがって (299) は

$$\begin{aligned} K &= Q(\sigma(K) - \Phi) + \Phi, \\ \hat{\partial}_K a &= \frac{i}{\hbar}[Q(\sigma(K) - \Phi), a],\quad a \in W_D. \end{aligned} \tag{303}$$

と書くことができる。[123] 第2式で Φ は center なので交換子の中では落とした。この交換子の形から $W(L, \mathcal{A})$ の inner derivation(299) から導かれる W_D の derivation $\hat{\partial}_K$ は局所的に W_D

[121] ここでの構成の方法は [22] の Appendix A に基づく。

[122] この条件は $\hbar$ の負冪が現れないようにするためのもの。

[123] [22] では $\sigma(K) = 0$ という条件を手でおいているが、ここでは一般にしておく。

の inner derivation で書けることがわかる。従って $a \in W_D$ を $a = Q(a_0)$ と書いて σ を作用させると局所的に

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_K Q(a_0) &= \frac{i}{\hbar}[Q(\sigma(K) - \Phi), Q(a_0)], \\ \to \ \partial_{*K} a_0 &:= \sigma(\hat{\partial}_K Q(a_0)) = \frac{i}{\hbar}[\sigma(K) - \Phi, a_0]_*, \end{aligned} \tag{304}$$

と書け ∂_{*K} は $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ 上の locally inner derivation になっていることがわかる。ここで $[a_0, b_0]_* := a_0 * b_0 - b_0 * a_0$ とした。

B.2 標準的な非可換座標

ここでは標準的な「非可換座標」として局所的に (166) のようなものを構成できることを示す。

まず symplectic 多様体 (M, Ω_0) について知られている Darboux の定理により

$$\Omega_0 = \frac{1}{2} J_{0IJ} dx^I \wedge dx^J \tag{305}$$

を満たす Darboux 座標 $x^I, I = 1, \cdots, 2n$ を選ぶことができる。$J_{0IJ} = -J_{0JI}$ は定数である。また以下では $J_0^{IK} J_{0KJ} = \delta^I_J$ となる J_0^{IK} も使う。

$k \geq 1$ に対し $\tilde{\phi}^I_{(k)} \in C^\infty(M)[[\hbar]], I = 1, \cdots, 2n$ として

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^I_{(k)}|_{\hbar=0} &= x^I \\ \frac{i}{\hbar}[\tilde{\phi}^I_{(k)}, \tilde{\phi}^J_{(k)}]_* &= -J_0^{IJ} + \hbar^k a^{IJ}_{(k)} + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}) \end{aligned} \tag{306}$$

と表されたとする。(特に $k = 1$ のときは $\tilde{\phi}^I_{(k)}$ として x^I そのものを選べば (305) と変形量子化の初項の条件 (55) からこれは自動的に満たされることに注意しよう。) このとき $*$ 積が結合律を満たすことから Jacobi 恒等式：

$$0 = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 [[\tilde{\phi}^{[I}_{(k)}, \tilde{\phi}^J_{(k)}]_*, \tilde{\phi}^{K]}_{(k)}]_* = \hbar^k \left(\frac{i}{\hbar}\right) [a^{[IJ}_{(k)}, \tilde{\phi}^{K]}_{(k)}]_* + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}) \tag{307}$$

が成立する。この最低次数 $\mathcal{O}(\hbar^k)$ に注目すると

$$[a^{[IJ}_{(k)}, x^{K]}]_{\mathrm{P.b.}} = 0 \tag{308}$$

であることがわかる。これは

$$a_{(k)} := \frac{1}{2} J_{0II'} J_{0JJ'} a^{I'J'}_{(k)} dx^I \wedge dx^J \tag{309}$$

が closed 2-form つまり $da_{(k)} = 0$ であることを示しており、局所的に

$$a_{(k)} = db_{(k)}, \ b_{(k)} = b_{(k)I} dx^I \tag{310}$$

なる 1-form $b_{(k)}$ が存在する。従って $b_{(k)I}$ を用いて

$$\tilde{\phi}^I_{(k+1)} := \tilde{\phi}^I_{(k)} + \hbar^k J_0^{IJ} b_{(k)J} \tag{311}$$

と置くことにより

$$\begin{aligned}\frac{i}{\hbar}[\tilde{\phi}^I_{(k+1)}, \tilde{\phi}^J_{(k+1)}]_* &= -J_0^{IJ} + \hbar^k \left(a^{IJ}_{(k)} - J_0^{IK} J_0^{JL} \left(\frac{\partial}{\partial x^K} b_{(k)L} - \frac{\partial}{\partial x^L} b_{(k)K} \right) \right) + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}) \\ &= -J_0^{IJ} + \mathcal{O}(\hbar^{k+1})\end{aligned} \tag{312}$$

となる。従ってこの操作を繰り返すことにより (166)：

$$\frac{i}{\hbar}[\tilde{\phi}^I, \tilde{\phi}^J]_* = -J_0^{IJ} \tag{313}$$

を満たす標準的な非可換座標 $\tilde{\phi}^I$ を求めることができる。

B.3 $*$ 積の計算例

ここでは§8.3 で定義した $*$ 積での (231) の計算法を書いておく。§8.6 の $*$ 積の計算も全く同様である。

まず $Q(z), Q(\bar{z})$ を y^1 の形式的冪級数で表しておく：

$$\begin{aligned}Q(z) &= \sqrt{\frac{r^2 + 2r(1+r^2)y^1}{1 - 2r(1+r^2)y^1}} e^{i\theta} = e^{i\theta} \sum_k a_k(r)(y^1)^k, \\ Q(\bar{z}) &= \sqrt{\frac{r^2 + 2r(1+r^2)y^1}{1 - 2r(1+r^2)y^1}} e^{-i\theta} = e^{-i\theta} \sum_k a_k(r)(y^1)^k\end{aligned} \tag{314}$$

$a_k(r)$ はある決まった係数だが具体的な形は知らなくてもよいことがわかる。

$$\begin{aligned}&\left(\left((y^1)^k e^{\pm i \frac{y^2}{r}} \right) \exp\left(-\frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^1} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^2} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^2} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^1} \right) \right) \left((y^1)^l e^{i \frac{y^2}{r}} \right) \right)_{y^1 = y^2 = 0} \\ &= \left(\frac{\hbar}{2r} \right)^k \left(\frac{\mp\hbar}{2r} \right)^l\end{aligned} \tag{315}$$

に注意すると $*$ 積は

$$\begin{aligned}z * z &= e^{2i\theta} \sum_{k,l} a_k(r) a_l(r) \left(\frac{\hbar}{2r} \right)^k \left(\frac{-\hbar}{2r} \right)^l \\ &= e^{2i\theta} \left(\sum_k a_k(r) \left(\frac{\hbar}{2r} \right)^k \right) \left(\sum_l a_l(r) \left(\frac{-\hbar}{2r} \right)^l \right) \\ &= e^{2i\theta} \sqrt{\frac{r^2 + \hbar(1+r^2)}{1 - \hbar(1+r^2)}} \sqrt{\frac{r^2 - \hbar(1+r^2)}{1 + \hbar(1+r^2)}} = \sqrt{\frac{r^4 - \hbar^2(1+r^2)^2}{1 - \hbar^2(1+r^2)^2}} e^{2i\theta}\end{aligned} \tag{316}$$

となる。このようにして (231)(233) の計算ができる。θ 依存性が $e^{i\theta}$ のものとの $*$ 積は上の計算に注意すると同様にして比較的容易に計算できる。

B.4 fuzzy S^2 と fuzzy H^2 の関係

ここでは§8で S^2 と H^2 上に導入した $*$ 積の間の関係を調べる。§8では黙って半径を1にとっていたがここでは半径を一般に R としその依存性をまとめてみよう。

B.4.1 fuzzy S^2

半径 R^2 の S^2 を $\mathbb{R}^3$ 内の2次元面

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \tag{317}$$

とみなす。このとき

$$\begin{aligned} &X = \frac{2R^2 r}{r^2+R^2}\cos\theta,\ Y = \frac{2R^2 r}{r^2+R^2}\sin\theta,\ Z = R\frac{r^2-R^2}{r^2+R^2}, \\ &r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \tag{318}$$

というパラメトリゼーションをすると計量は $ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$ より

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(r^2+R^2)^2}(dr^2 + r^2 d\theta^2) \tag{319}$$

となる。断面曲率は $K = \frac{1}{R^2}$ になる。そこで§8のように

$$\Omega_0 = \frac{4R^4}{(r^2+R^2)^2} r dr \wedge d\theta \tag{320}$$

から $*$ 積を構成すると

$$\begin{aligned} & a_0(r,\theta) * b_0(r,\theta) \\ = & \left(a_0\left(\sqrt{\frac{r^2 + \frac{y^1}{2R^2}r(r^2+R^2)}{1-\frac{y^1}{2R^2}r(r^2+R^2)}}, \theta + \frac{y^2}{r}\right) \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^1}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^2} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^1}\right)\right)\right. \\ & \left.\cdot b_0\left(\sqrt{\frac{r^2 + \frac{y^1}{2R^2}r(r^2+R^2)}{1-\frac{y^1}{2R^2}r(r^2+R^2)}}, \theta + \frac{y^2}{r}\right)\right)_{y^1=y^2=0} \end{aligned} \tag{321}$$

となる。これより X, Y, Z たちの間の関係は

$$\begin{aligned} & X * X + Y * Y + Z * Z = R^2\left(1 - \frac{\hbar^2}{4R^4}\right), \\ & [X, Y]_* = i\frac{\hbar}{R}Z,\ [Y, Z]_* = i\frac{\hbar}{R}X,\ [Z, X]_* = i\frac{\hbar}{R}Y \end{aligned} \tag{322}$$

となり (X, Y, Z) は半径 $R\sqrt{1-\frac{\hbar^2}{4R^4}}$ の fuzzy sphere の座標を表している。

次に $z := re^{i\theta}, \bar{z} := re^{-i\theta}$ の間の $*$ 積は

$$
\begin{aligned}
z * z &= \sqrt{\frac{r^4 - \left(\frac{\hbar}{4R^2}(r^2+R^2)\right)^2}{1-\left(\frac{\hbar}{4R^4}(r^2+R^2)\right)^2}} e^{2i\theta} = \overline{\bar{z} * \bar{z}}, \\
z * \bar{z} &= \frac{r^2 - \frac{\hbar}{4R^2}(r^2+R^2)}{1+\frac{\hbar}{4R^4}(r^2+R^2)}, \quad \bar{z} * z = \frac{r^2 + \frac{\hbar}{4R^2}(r^2+R^2)}{1-\frac{\hbar}{4R^4}(r^2+R^2)}, \\
[z, \bar{z}]_* &= \frac{-\frac{\hbar}{2R^4}(r^2+R^2)^2}{1-\left(\frac{\hbar}{4R^4}(r^2+R^2)\right)^2} = -\frac{\hbar}{2R^4}(R^2 + z * \bar{z})(R^2 + \bar{z} * z)
\end{aligned}
\tag{323}
$$

のようになる。

B.4.2 fuzzy H^2

「半径」 R^2 の H^2 を $\mathbb{R}^{1,2}$ 内の 2 次元面

$$
-(Y^0)^2 + (Y^1)^2 + (Y^2)^2 = -R^2, \quad Y^0 > 0 \tag{324}
$$

とする。このとき

$$
\begin{aligned}
&Y^0 = R\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2},\ Y^1 = \frac{2R^2 r}{R^2-r^2}\cos\theta,\ Y = \frac{2R^2 r}{R^2-r^2}\sin\theta, \\
&0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi
\end{aligned}
\tag{325}
$$

というパラメトリゼーションをすると計量は $ds^2 = -(dY^0)^2 + (dY^1)^2 + (dY^2)^2$ より

$$
ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2-r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\theta^2) \tag{326}
$$

となる。断面曲率は $K = -\frac{1}{R^2}$ になる。そこで §8 のように

$$
\Omega_0 = \frac{4R^4}{(R^2-r^2)^2} r dr \wedge d\theta \tag{327}
$$

から $*$ 積を構成すると

$$
\begin{aligned}
&a_0(r,\theta) * b_0(r,\theta) \\
= &\left(a_0\left(\sqrt{\frac{r^2 + \frac{y^1}{2R^2}r(R^2-r^2)}{1+\frac{y^1}{2R^2}r(R^2-r^2)}}, \theta + \frac{y^2}{r}\right) \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^1}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^2} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^1}\right)\right)\right. \\
&\left.\cdot b_0\left(\sqrt{\frac{r^2 + \frac{y^1}{2R^2}r(R^2-r^2)}{1+\frac{y^1}{2R^2}r(R^2-r^2)}}, \theta + \frac{y^2}{r}\right)\right)_{y^1=y^2=0}
\end{aligned}
\tag{328}
$$

となる。これより Y^0, Y^1, Y^2 たちの間の関係は

$$-Y^0 * Y^0 + Y^1 * Y^1 + Y^2 * Y^2 = -R^2\left(1 - \frac{\hbar^2}{4R^4}\right),$$

$$[Y^0, Y^1]_* = i\frac{\hbar}{R}Y^2,\ [Y^2, Y^0]_* = i\frac{\hbar}{R}Y^1,\ [Y^1, Y^2]_* = -i\frac{\hbar}{R}Y^0 \tag{329}$$

となり (Y^0, Y^1, Y^2) は「半径」 $R\sqrt{1-\frac{\hbar^2}{4R^4}}$ の fuzzy H^2 の座標を表している。

次に $z := re^{i\theta}, \bar{z} := re^{-i\theta}$ の間の $*$ 積は

$$z * z = \sqrt{\frac{r^4 - \left(\frac{\hbar}{4R^2}(R^2 - r^2)\right)^2}{1 - \left(\frac{\hbar}{4R^4}(R^2 - r^2)\right)^2}}\, e^{2i\theta} = \overline{\bar{z} * \bar{z}},$$

$$z * \bar{z} = \frac{r^2 - \frac{\hbar}{4R^2}(R^2 - r^2)}{1 - \frac{\hbar}{4R^4}(R^2 - r^2)}, \quad \bar{z} * z = \frac{r^2 + \frac{\hbar}{4R^2}(R^2 - r^2)}{1 + \frac{\hbar}{4R^4}(R^2 - r^2)},$$

$$[z, \bar{z}]_* = \frac{-\frac{\hbar}{2R^4}(R^2 - r^2)^2}{1 - \left(\frac{\hbar}{4R^4}(R^2 - r^2)\right)^2} = -\frac{\hbar}{2R^4}(R^2 - z * \bar{z})(R^2 - \bar{z} * z) \tag{330}$$

のようになる。

B.4.3 $R \to \infty$ と $\mathbb{R}^2$

上で考えた S^2 も H^2 も $R \to \infty$ とすると普通の意味（つまり可換な積を考えているとき）で 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ になる。実際、断面曲率も $R \to \infty$ で S^2 のとき $K \to +0$, H^2 のとき $K \to -0$ となる。ではこれらを非可換に変形したものはどのようになるのだろうか？

比較のため $\mathbb{R}^2$ の §8 の意味の $*$ 積を書いておこう。ただしここでの規格化は上の S^2, H^2 で $R \to \infty$ として得られる

$$ds^2 = 4(dr^2 + r^2 d\theta^2) \tag{331}$$

を $\mathbb{R}^2$ の計量とするものである。したがって

$$\Omega_0 = 4r dr \wedge d\theta \tag{332}$$

から $*$ 積を構成すると

$$\begin{aligned} &a_0(r, \theta) * b_0(r, \theta) \\ &= \left(a_0\left(\sqrt{r^2 + \frac{y^1 r}{2}}, \theta + \frac{y^2}{r}\right) \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^1}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^2} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^1}\right)\right)\right. \\ &\left.\cdot b_0\left(\sqrt{r^2 + \frac{y^1 r}{2}}, \theta + \frac{y^2}{r}\right)\right)_{y^1 = y^2 = 0} \end{aligned} \tag{333}$$

このとき $z:=re^{i\theta}, \bar{z}:=re^{-i\theta}$ の間の $*$ 積は

$$
\begin{aligned}
& z*z=\sqrt{r^4-\frac{\hbar^2}{16}}=\overline{\bar{z}*\bar{z}}, \\
& z*\bar{z}=r^2-\frac{\hbar}{4}, \quad \bar{z}*z=r^2+\frac{\hbar}{4}, \\
& [z,\bar{z}]_*=-\frac{\hbar}{2}
\end{aligned} \tag{334}
$$

のようになる。

したがって S^2 (323) と H^2 (330) における $*$ 積による $z,\bar{z}$ の交換関係は $R\to\infty$ とすることにより $\mathbb{R}^2$ の交換関係に帰着する。

言い換えると上で構成した $*$ 積は $R=\infty$ を通じて fuzzy S^2 の $su(2)$ 代数 (あるいは S^2 の等長群の代数) と fuzzy H^2 の $su(1,1)$ 代数（あるいは H^2 の等長群の代数）をつなぐものになっている。

B.5 Weyl型とWick型

ここでは非可換な積からなる代数を作用素の積とみなすことでWeyl型とWick型の積に対応する作用素の積の順序を議論する。

量子力学の類推で座標 x^μ, $\mu=1,\cdots,2n$ に対応する作用素を $\hat{x}^\mu$ とし、それらは

$$
[\hat{x}^\mu,\hat{x}^\nu]:=\hat{x}^\mu\hat{x}^\nu-\hat{x}^\nu\hat{x}^\mu=-i\hbar\omega^{\mu\nu} \tag{335}
$$

のように非可換であるとする。[124]ただし $\omega^{\mu\nu}$ は $\hat{x}^\mu$ に依存しない定数とする。[125] また複素正則座標を $z^i=x^i+ix^{i+n}$, $i=1,\cdots,n$、反正則座標を $z^{\bar{i}}=x^i-ix^{i+n}$ と定義し $\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$ を (252) のように標準的に Kähler form と同一視して（定数の）Kähler metric $g_{i\bar{j}}$ を導入する。このとき複素座標に対応する作用素 $\hat{z}^i,\hat{z}^{\bar{i}}$ の交換関係は

$$
[\hat{z}^i,\hat{z}^{\bar{j}}]=2\hbar g^{i\bar{j}} \tag{337}
$$

となる。この式から $\hat{z}^{\bar{j}}$ を生成演算子、$\hat{z}^i$ を消滅演算子のように考えて $\hat{z}^i$ を右に $\hat{z}^{\bar{j}}$ を左に持ってくる順序をWick順序と呼ぶことにする。

普通の関数 $f(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ に対応する作用素でWeyl順序、Wick順序に対応するものを

[124]普通の量子力学では $\hat{x}^\mu$ と $\hat{p}_\mu$ が非可換

$$
[\hat{x}^\mu,\hat{p}_\nu]=i\hbar\delta^\mu_\nu, \quad \mu,\nu=1,\cdots,n \tag{336}
$$

とするが、今考えている状況つまり非可換幾何学の場合には共役運動量 $\hat{p}_\nu$ に対応するものも「座標」とみなしている。

[125]§5.1 においては一般に $\omega^{\mu\nu}$ は x の関数としていたが $\circ$ 積は y 微分で定義されていたのでここでは $y\to x$ と読み替え $\omega^{\mu\nu}$ を定数とみなすことでちょうど対応している。$\circ'$ 積についても同様である。

それぞれ $\hat{O}_f(\hat{x}), \hat{O}'_f(\hat{x})$ と書くことにして

$$\begin{aligned}
\hat{O}_f(\hat{x}) &:= \int \frac{dk^{2n}}{(2\pi)^n} \int \frac{dx^{2n}}{(2\pi)^n} e^{-ik_\mu(\hat{x}-x)^\mu} f(x) = \int \frac{dk^{2n}}{(2\pi)^n} e^{-ik_\mu \hat{x}^\mu} \tilde{f}(k), \\
\hat{O}'_f(\hat{x}) &:= \int \frac{dk^{2n}}{(2\pi)^n} \int \frac{dx^{2n}}{(2\pi)^n} e^{-ik_{\bar{i}}(\hat{z}-z)^{\bar{i}}} e^{-ik_i(\hat{z}-z)^i} f(x) = \int \frac{dk^{2n}}{(2\pi)^n} e^{-ik_{\bar{i}}\hat{z}^{\bar{i}}} e^{-ik_i \hat{z}^i} \tilde{f}(k)
\end{aligned} \tag{338}$$

と定義する。ここで $\tilde{f}(k)$ は $f(x)$ のフーリエ変換である:

$$\tilde{f}(k) := \int \frac{dx^{2n}}{(2\pi)^n} e^{ik_\mu x^\mu} f(x). \tag{339}$$

このときそれぞれの順序の演算子の積を計算すると

$$\begin{aligned}
\hat{O}_f \hat{O}_g &= \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^n} \int \frac{d^{2n}k'}{(2\pi)^n} e^{-ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} \tilde{f}(k-k')\tilde{g}(k') \\
&= \hat{O}_{f*g}, \\
\hat{O}'_f \hat{O}'_g &= \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^n} \int \frac{d^{2n}k'}{(2\pi)^n} e^{-ik_{\bar{i}}\hat{z}^{\bar{i}}} e^{-ik_i \hat{z}^i} e^{-2\hbar g^{i\bar{i}}(k-k')_i k'_{\bar{i}}} \tilde{f}(k-k')\tilde{g}(k') \\
&= \hat{O}_{f*'g}
\end{aligned} \tag{340}$$

となる。[126] ここでそれぞれの積に対応する関数は

$$\begin{aligned}
f * g &:= f \exp\left(-\frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} \omega^{\mu\nu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu} \right) g, \\
f *' g &:= f \exp\left(2\hbar \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^i} g^{i\bar{j}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^{\bar{j}}} \right) g
\end{aligned} \tag{341}$$

のように無限回微分のかかる結合的で非可換な積 $*, *'$ で表されるものである。この定義の $*$ 積はMoyal積と呼ばれるもので、演算子のWeyl順序に対応するものなのでWeyl型の積と呼ばれることもある。それに対し $*'$ 積はWick順序(正規順序)に対応するものなのでWick型の積と呼ばれる。

この $*$ 積と $*'$ 積は

$$S := \exp\left(\hbar g^{i\bar{j}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^{\bar{j}}} \right) \tag{342}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
&S^{-1}\left((Sf(x)) * S(g(x)) \right) \\
&= \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^n} \int \frac{d^{2n}k'}{(2\pi)^n} e^{-i(k+k')_\mu x^\mu} e^{\hbar g^{i\bar{j}}((k+k')_i(k+k')_{\bar{j}} - k_i k_{\bar{j}} - k'_i k'_{\bar{j}} - 2k_i k'_{\bar{j}})} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k') \\
&= f(x) * g(x)
\end{aligned} \tag{343}$$

[126] この計算においてBaker-Campbell-Hausdorffの公式を用いた。

のように関係づけることができる。したがって非可換な代数 $(C^\infty(\mathbb{R}^{2n}), *)$ と $(C^\infty(\mathbb{R}^{2n}), *')$ は S により同型であることがわかる。

参考文献

[1] T. Asakawa and I. Kishimoto, *"Comments on Gauge Equivalence in Noncommutative Geometry,"* *JHEP* **9911** (1999) 024. `hep-th/9909139`.

[2] T. Asakawa and I. Kishimoto, *"Noncommutative Gauge Theories from Deformation Quantization,"* *Nucl. Phys.* **B591** (2000) 611-635. `hep-th/0002138`.

[3] N. Seiberg and E. Witten, *"String Theory and Noncommutative Geometry,"* *JHEP* **9909** (1999) 032. `hep-th/9908142`.

[4] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, *"Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori,"* *JHEP* **9802** (1998) 003. `hep-th/9711162`.

[5] M. R. Douglas and C. Hull, *"D-branes and the Noncommutative Torus,"* *JHEP* **9802** (1998) 008. `hep-th/9711165`.

[6] E. Witten, *"Non-commutative Geometry and String Field Theory,"* *Nucl.Phys.* **B268** (1986) 253-294.

[7] A. Connes, *"Noncommutative Geometry,"* *Academic Press* (1994), "非可換幾何学入門," 岩波書店 (1999)

[8] B.V. Fedosov, *"A simple geometrical construction of deformation quantization,"* *J. Diff. Geom.* **40** (1994) 213-238.

[9] B.V. Fedosov, *"Deformation quantization and index theory,"* Berlin, Germany: *Akademie-Verl.* (1996) 325 p. (Mathematical topics: 9).

[10] 例えば、川又雄二郎 "代数多様体論," 岩波書店 (1997)

[11] T. Kawano and T. Takahashi, *"Open String Field Theory on Noncommutative Space,"* `hep-th/9912274`.

[12] J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, *"Exact Noncommutative Solitons,"* `hep-th/0010060`.

[13] M. Kontsevich, *"Deformation quantization of Poisson manifolds, I,"* `q-alg/9709040`.

[14] A. S. Cattaneo and G. Felder, *"A path integral approach to the Kontsevich quantization formula,"* `math.QA/9902090`.

[15] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, *"Deformation Theory and Quantization. I. Deformation of Symplectic Structures,"*, Ann. Phys. **111** (1978) 61-110. *"Deformation Theory and Quantization. II. Physical Applications,"* Ann. Phys. **111** (1978), 111-151.

[16] M. De Wilde and P. Lecomte, *"Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds,"* Lett. Math. Phys. **7** (1983) 487-496. H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka *"Weyl manifolds and deformation quantization,"* Advances in Math. **85** (1991), 224-255.

[17] M. Bertelson, M.Cahen and S. Gutt, *"Equivalence of star products,"* Class. Quantum Grav. **14** (1997) A93-A107.

[18] L. Cornalba, *"D-brane Physics and Noncommutative Yang-Mills Theory,"* `hep-th/9909081`.

[19] K. Okuyama, *"A Path Integral Representation of the Map between Commutative and Noncommutative Gauge Fields,"* `hep-th/9910138`.

[20] C-S Chu, P-M Ho and M. Li, *"Matrix Theory in a Constant C Field Background,"* Nucl. Phys. **B574** (2000) 275-287. `hep-th/9911153`.

[21] B. Jurco and P. Schupp, *"Noncommutative Yang-Mills from equivalence of star products,"* Eur. Phys. J. **C14** (2000) 367-370. `hep-th/0001032`.

[22] P. Xu, *"Fedosov $*$-products and quantum momentum maps,"* `q-alg/9608006`.

[23] M. Bodemann and S. Waldemann, *"A Fedosov Star Product of Wick Type for Käher Manifolds,"* Lett. Math. Phys. **41** (1997) 243-253.

[24] E. Bergshoeff, M. de Roo, M. B. Green, G. Papadopoulos and P. K. Townsend, *"Duality of Type II 7-branes and 8-branes,"* Nucl. Phys. **B470** (1996) 113-135. `hep-th/9601150`.

[25] D.E.Tamarkin, *"Fedosov connection on Kähler symmetric manifolds and trace density conputation,"* J.Diff.Geom **50** (1998) 387-413.

[26] 深谷賢治, *"シンプレクティック幾何学,"* 岩波書店 (1999)

[27] I. Gelfand, V. Retakh and M. Shubin, *"Fedosov Manifolds,"* `dg-ga/9707024`.

[28] 例えば、S. Kobayashi and K. Nomizu, *"Foundations of Differential Geometry,"* vol.II, John Wiley & Sons (1969)

[29] 例えば、佐藤文隆・小玉英雄 "一般相対性理論," 岩波書店 (1992)

[30] M. Bordemann, *"On the Deformation Quantization of super-Poisson Brackets,"* q-alg/9605038. *"The deformation quantization of certain super-Poisson brackets and BRST cohomology,"* math.QA/0003218.

[31] 例えば、九後汰一郎 *"(Gauge) String Field Theory,"* 素粒子論研究 **98-2** (1998) 107-172.